JIHOČESKÁ UNIVERZITA
V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH
Zdravotně sociální fakulta

VYBRANÉ KAPITOLY Z OBECNÉ A TEORETICKÉ FYZIKY

doplňkové texty pro posluchače kombinované formy studia
studijního programu „Ochrana obyvatelstva"

studijního oboru „Ochrana obyvatelstva se zaměřením na CBRNE"

Doc. RNDr. Přemysl Záškodný,CSc.

ČESKÉ BUDĚJOVICE 2007

VYBRANÉ KAPITOLY

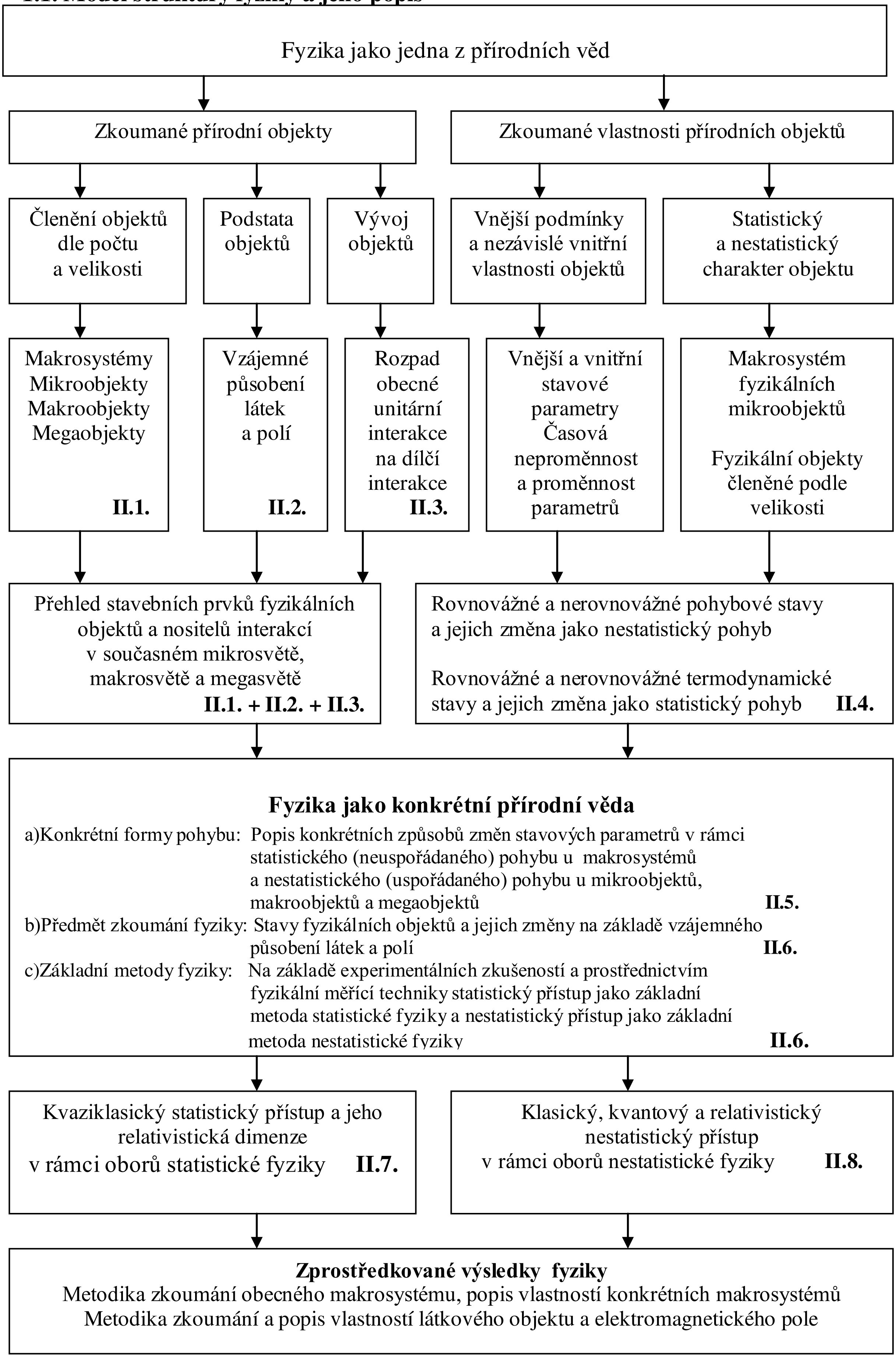
Z OBECNÉ A TEORETICKÉ FYZIKY

(KLASICKÁ, KVANTOVÁ A RELATIVISTICKÁ FYZIKA)

1. Struktura fyziky

Klíčová slova: Statistická a nestatistická fyzika,
Klasická dimenze,
Kvantová dimenze,
Relativistická dimenze,
Pohybová rovnice a pohybový zákon

1.1. Model struktury fyziky a jeho popis



Model na Obr.1 lze stručně popsat následujícím způsobem (v uvedené literatuře je popis proveden pomocí odstavců, které mají v Obr.1 označení II.1. až II.8.):

a) Fyzika jako jedna z přírodních věd zkoumá makrosystémy tvořené obrovským počtem objektů (většinou částic) pohybujících se neuspořádaným (statistickým) pohybem. Dále zkoumá mikroobjekty, makroobjekty a megaobjekty, které jsou buď osamocené nebo tvořeny objekty, které se pohybují uspořádaným (nestatistickým) pohybem (např. proud částic nebo vlnění). Podstatou těchto objektů je vzájemné působení látek a polí. Vývoj těchto objektů až do současnosti je spojen s postupným rozpadem obecné unitární interakce na dílčí interakce (gravitační, elektromagnetickou, silnou a slabou interakci)

b) Makrosystémy mají statistický charakter, je brána v úvahu jejich vnitřní struktura. Zkoumá je statistická fyzika, jejich stavy se nazývají stavy termodynamickými. Možným stavům je přiřazována pravděpodobnost jejich výskytu pomocí distribučních funkcí, stavové parametry těchto stavů jsou souborovými středními hodnotami fyzikálních veličin. Pohyb je pojímán jako změna stavu. Většinou jsou zkoumány stavy termodynamické rovnováhy, v nichž se střední hodnoty stavových parametrů s časem nemění. Příkladem mohou být makrosystémy molekul vzduchu, ale také makrosystémy fermionů (např. elektronový plyn v kovech jako degenerovaný Fermiho plyn) nebo bosonů (např. fotonový plyn záření černého tělesa nebo fononový a rotonový plyn v krystalech, amorfních látkách a supravodivých materiálech jako degenerované Boseho plyny)

c) Mikroobjekty, makroobjekty a megaobjekty mají nestatistický charakter, jejich vnitřní struktura není brána v úvahu. Zkoumá je nestatistická fyzika, jejich stavy se nazývají stavy pohybovými. Popis pohybových stavů umožňují pohybové zákony (kinematika), příčiny změn pohybových stavů umožňují popsat pohybové rovnice (dynamika). Jsou zkoumány stavy rovnovážné (statické, stacionární) a také stavy nerovnovážné (kvazistacionární, nestacionární). Pohyb je opět pojímán jako změna stavu. Příkladem stacionárního stavu může být stav vázaného elektronu v obalu atomu, který nezáří a neabsorbuje. Příkladem nestacionárního stavu může být stav vázaného elektronu při jeho excitaci nebo deexcitaci (atom při excitaci může absorbovat foton, při deexcitaci naopak foton vyzařovat).

d) Statistická i nestatistická fyzika mají svou variantu klasickou, kvantovou (je uplatňován vlnově korpuskulární dualismus) a relativistickou (prostor a čas závisí na rozložení a pohybu fyzikálních objektů). V rámci statistické fyziky jsou tyto tři dimenze spojovány do kvaziklasického statistického přístupu, v rámci nestatistické fyziky je klasická dimenze zkoumána klasickou mechanikou a klasickými aplikacemi elektromagnetického pole, kvantová a relativistická dimenze kvantovou a relativistickou mechanikou a kvantovými a relativistickými aplikacemi elektromagnetického pole.

e) Nestatistickou fyziku (nestatistický přístup) lze vystavět na základě pojmů **"pohybová rovnice"** (např. druhý Newtonův zákon v klasické mechanice, nestacionární Schrödingerova rovnice v nerelativistické kvantové mechanice) a **"pohybový zákon"** (např. tvar trajektorie jako množina koncových bodů polohového vektoru v klasické mechanice; v kvantové mechanice si lze představit tvar trajektorie jako množinu "pravděpodobnostních oblaků" vázaného elektronu při jeho excitaci nebo deexcitaci v obalu atomu).

f) Statistickou fyziku (statistický přístup) lze vystavět na pojmu **"distribuční funkce"** (např. Maxwellova distribuce rychlostí v molekulách plynu jako jednoduchá aplikace Maxwellova-Boltzmannova rozdělení) a "**souborová střední hodnota**" (např. střední kvadratická rychlost molekul plynu).

1.2. Potřebné matematické znalosti pro aplikaci na radiologii

- Systém elementárních funkcí

a) Číselné množiny (množina přirozených čísel, množina reálných čísel, množina komplexních čísel)
b) Polynomické funkce, především 0., 1. a 2. řádu (konstantní, lineární, kvadratická funkce)
c) Goniometrické funkce, především sinus, kosinus, tangens, kotangens (vztahy mezi goniometrickými funkcemi)
d) Exponenciální a logaritmické funkce, Eulerovo číslo
e) Lineárně lomená funkce (souřadnice průsečíku asymptot hyperboly)
f) Vlastnosti funkcí (definice funkce, definiční obor a obor hodnot, inverzní funkce, složená funkce, kartézský graf funkce, periodičnost, lichost, sudost, omezenost)

- Diferenciální počet

a) Limita funkce, spojitost funkce
b) Definice derivace funkce jedné proměnné, derivace elementárních funkcí
c) Derivace součinu a podílu funkcí, derivace složené funkce
d) Funkce více proměnných, parciální derivace, úplný diferenciál
e) Průběh funkce, Taylorův a Maclaurinův rozvoj funkce, diferenciální rovnice

- Integrální počet

a) Plocha omezená jednoduchým grafem funkce a geometrický výpočet velikosti plochy
b) Neurčitý integrál a primitivní funkce, určitý integrál
c) Integrace elementárních funkcí
d) Integrace per partes, integrace substitucí
e) Výpočty ploch, objemů a délek křivek užitím integrálního počtu

- Vektorový počet

a) Definice vektoru, souřadnice a velikost vektoru, jednotkový, opačný a nulový vektor
b) Operace s vektory - součet vektorů, násobení vektoru reálným číslem, skalární, vektorový a smíšený součin vektorů
c) Polohový vektor, jednotkové vektory souřadnicových os
d) Vektorová funkce a její derivace, derivace polohového vektoru podle času
e) Vektorová funkce a její integrace, integrace vektorové funkce zrychlení a vektorové funkce rychlosti podle času

- Analytická geometrie

a) Analytická geometrie přímky
b) Analytická geometrie kuželoseček

Kontrolní otázky:

1) Které objekty a stavy zkoumá nestatistická fyzika

2) Které objekty a stavy zkoumá statistická fyzika

3) Která z obou fyzik hraje rozhodující roli v radiologii

4) Co je to klasická dimenze nestatistické fyziky

5) Co je to kvantová dimenze nestatitické fyziky

6) Co je to relativistická dimenze nestatistické fyziky

7) Co je to pohybový zákon a pohybová rovnice

2. Klasická mechanika

Klíčová slova: Vymezení klasické mechaniky, Newtonovský formalismus, Zákony Zachování, Mechanický pohyb kmitavý, Mechanické vlnění

2.1. Vymezení klasické mechaniky

Mechanika zkoumá pohybové stavy a změny pohybových stavů, které souvisejí s mechanickým pohybem různých fyzikálních objektů - těles, skupin těles a různých druhů kontinua (např. kapaliny, plyny). Mechanický pohyb lze definovat jako změnu polohy fyzikálního objektu vůči jiným objektům s probíhajícím časem, mezi mechanické pohyby patří pohyb fyzikálního objektu jako celku, ale i uspořádané formy pohybu soustavy částic tvořících klasický nestatistický fyzikální objekt (např. zvukové nebo mechanické vlnění). Při zkoumání pohybových stavů a jejich změn bude započato se zkoumáním těchto fyzikálních jevů u hmotného bodu.

K přesnému určení polohy a pohybu zkoumaného tělesa si mechanika často vybírá myšlený bodový objekt, kterým nahrazuje těleso - **hmotný bod**. Při popisu pohybu tělesa je potřebné určit vztažné těleso, vzhledem k němuž je pak určována poloha. Spojením vztažného tělesa se soustavou pravoúhlých kartézských souřadnic lze získat **souřadnicovou vztažnou soustavu** s obvyklými osami x, y, z. **Polohu zkoumaného hmotného bodu je možné určit pomocí polohového vektoru** $\vec{r}$, který lze zapsat pomocí jednotkových vektorů $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ souřadnicových os x, y, z ve tvarech

$$\text{(B1)} \qquad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,, \quad \vec{r}\,(x,y,z),$$

kde x,y,z jsou souřadnice koncového bodu polohového vektoru $\vec{r}$ (počáteční bod leží vždy v počátku vztažné souřadnicové soustavy). Polohový vektor a jeho souřadnice x,y,z jsou funkcemi času a množina koncových bodů polohového vektoru vytváří **trajektorii hmotného bodu**.

Mechanika se člení na kinematiku a dynamiku. Kinematika zkoumá časový průběh pohybu hmotného bodu pomocí trajektorie, rychlosti a zrychlení hmotného bodu, dynamika zkoumá především síly jako příčiny pohybu hmotného bodu.

Kinematika ze znalosti polohového vektoru hmotného bodu jako funkce času

$$\text{(B2)} \qquad \vec{r} = \vec{r}\,(t)$$

(tj. ze znalosti **pohybového zákona**) může derivací polohového vektoru podle času t získat vztahy pro rychlost $\vec{v}$ a zrychlení $\vec{a}$ hmotného bodu (první derivace podle času je označena tečkou, druhá derivace podle času dvěma tečkami):

$$\text{(B3)} \qquad \vec{v}\,(t) = \dot{\vec{r}}\,(t) = \dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}(t)\,\vec{j} + \dot{z}(t)\,\vec{k}\,, \quad \text{tj.} \quad \vec{v}\,(v_x, v_y, v_z)$$

$$\text{(B4)} \qquad \vec{a}\,(t) = \ddot{\vec{r}}\,(t) = \ddot{x}(t)\,\vec{i} + \ddot{y}(t)\,\vec{j} + \ddot{z}(t)\,\vec{k}\,, \quad \text{tj.} \quad \vec{a}\,(a_x, a_y, a_z).$$

Nechť je uvažován volný hmotný bod jako hmotný bod, který nemá geometrická omezení pohybu způsobená tzv. vazbami. Pak lze ze znalosti zrychlení prostřednictvím zákona síly jako součásti newtonovského formalismu napsat **pohybové rovnice** ve tvaru

$$\text{(B5)} \qquad \vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \quad (F_x = m\,\ddot{x}\,,\ F_y = m\,\ddot{y}\,,\ F_z = m\,\ddot{z}\,).$$

Zatímco kinematika představuje s použitím diferenciálního počtu cestu od pohybového zákona k pohybovým rovnicím, dynamika je cestou opačnou - ze znalosti příčin pohybu (sil) vychází z pohybových rovnic (B5) a s použitím integrálního počtu získává pohybový zákon (B2). Pohybové rovnice ve tvaru (B5) jsou výrazem newtonovského formalismu, pro případ vázaného hmotného bodu by bylo zapotřebí využít formalismu lagrangeovského nebo hamiltonovského.

Základním pojmem dynamiky je pojem síly. Síly (v zjednodušené podobě jako vzájemné působení hmotných bodů, těles, polí) lze dělit na síly s deformačními účinky (statické účinky síly spojené se změnou tvaru) a na síly s translačními a rotačními účinky (dynamické účinky síly spojené se změnou polohy) nebo na síly vtištěné (síly fyzikálního původu) a síly vazbové (síly geometrického původu jako prostorová omezení pohybu) nebo také na síly vnější (mající původ v objektech nacházejících se mimo sledovanou soustavu hmotných bodů) a síly vnitřní.

2.2. Newtonovský formalismus klasické mechaniky

Základními formalismy mechaniky jsou formalismus lagrangeovský a hamiltonovský. V jednoduchých případech tyto formalismy přecházejí ve formalismus newtonovský daný vztahy (B1) pro pohybový zákon a (B5) pro pohybovou rovnici. Newtonovský formalismus kromě pohybové rovnice (B5), která se často nazývá 2. Newtonovým pohybovým zákonem, pracuje se zákonem setrvačnosti (1. Newtonův pohybový zákon) a zákonem akce a reakce (3. Newtonův pohybový zákon)

Např. pro vrh vodorovný lze obdržet 2. Newtonův pohybový zákon (B5) ve tvaru

$$0 = m\,\ddot{x}\,, \quad -mg = m\,\ddot{y}\,, \quad 0 = m\,\ddot{z}$$

Řešení pohybových rovnic povede po první integraci podle času a s uplatněním počátečních podmínek pro rychlost k vektoru rychlosti vodorovného vrhu

$$\vec{v}\,(t) = \dot{\vec{r}}\,(t) = v_0\,\vec{i} - gt\,\vec{j} + 0\vec{k}\,,$$

po provedení druhé integrace podle času a s uplatněním počátečních podmínek pro polohový vektor bude získán pohybový zákon (B2) pro vodorovný vrh ve tvaru (B1)

$$\vec{r} = v_0 t\,\vec{i} - \frac{1}{2}gt^2\vec{j} + 0\,\vec{k}\,.$$

2.3. Zákony zachování jako integrály pohybových rovnic

2.3.1. Zákon zachování mechanické energie

Obvykle je zákon zachování mechanické energie uváděn pro izolovaný hmotný bod (nejsou přítomna ani vnější silové pole, ani působící okolní hmotné body) nebo pro volný hmotný bod nacházející se v konzervativním silovém poli (v konzervativním silovém poli je práce vykonaná po uzavřené křivce nulová). Oba popsané případy jsou spojeny se zachováním součtu kinetické energie *T* a potenciální energie *V* (tj. mechanické energie) hmotného bodu.

2.3.2. Další zákony zachování, počet integrálů pohybových rovnic

Nejen pro hmotný bod, ale i pro izolovanou soustavu hmotných bodů platí, že taková soustava má celkem 7 aditivních pohybových integrálů - energii vyjádřenou Hamiltonovou funkcí H, hybnost $\vec{p}$ a moment hybnosti $\vec{b}$.

2.4. Mechanický kmitavý pohyb oscilátoru

2.4.1. Obecný a periodický pohyb kmitavý

Kmitavý pohyb je pohyb, při němž hmotný bod zachovává konečnou vzdálenost od své rovnovážné polohy. Hmotný bod, který koná pohyb kmitavý se nazývá oscilátor. Periodický kmitavý pohyb je pohyb s periodickým opakováním svého průběhu - jeden stále se opakující průběh se nazývá kmit. S periodickým kmitáním jsou spojeny obvyklé pojmy doby kmitu T a frekvence ν kmitavého pohybu jako počet kmitů za 1 s. Platí známý vztah

$$\text{(B9)} \qquad T = \frac{1}{\nu}.$$

Kmitá-li oscilátor po přímce, jde o lineární kmitavý pohyb. Obvykle bude zkoumán právě lineární kmitavý pohyb, jehož kmitání se bude z hlediska obvyklé volby kartézské souřadnicové soustavy odehrávat v ose y, rovnovážnou polohu pak lze spojit s počátkem souřadnicové soustavy. Okamžitá vzdálenost od rovnovážné polohy je okamžitá výchylka y, maximální okamžitá výchylka je amplituda A.

2.4.2. Rovnoměrný pohyb kruhový, harmonický pohyb kmitavý

Harmonický pohyb kmitavý hmotného bodu je úzce spojen s rovnoměrným pohybem kruhovým hmotného bodu se stejnou hmotností m. Při rovnoměrném pohybu kruhovém (střed kružnice splývá s počátkem souřadnicové soustavy) kolmé průměty okamžitých poloh hmotného bodu na osu y konají kmitavý pohyb, který je harmonickým pohybem kmitavým. Jelikož s rovnoměrným pohybem kruhovým je spojen pojem úhlové frekvence (úhlové rychlosti) ω jako úhlu, který polohový vektor hmotného bodu opíše za 1 s, je tato fyzikální veličina použita také při popisu harmonického pohybu kmitavého. Úhlová frekvence ω je spojena s frekvencí ν vztahem

$$\text{(B10)} \qquad \omega = 2\pi\nu.$$

Obvodová rychlost v rovnoměrného pohybu kruhového po kružnici o poloměru r (r je také velikost polohového vektoru), dostředivé zrychlení a_n (tečné zrychlení a_τ je nulové, neboť velikost vektoru rychlosti se nemění) a dostředivá síla F_n jsou dány vztahy ve skalární a vektorové podobě

$$\text{(B11)} \qquad v = \omega r,\ \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}\ ,\ a_n = \omega^2 r = \omega v,\ \overrightarrow{a_n} = \vec{\omega} \times \vec{v}\ ,\ F_n = m\ a_n\ ,\ \overrightarrow{F_n} = m\overrightarrow{a_n}\ .$$

2.4.3. Dynamický a kinematický popis harmonického pohybu kmitavého

Dynamickou příčinou harmonického pohybu kmitavého v ose y je síla F, jejíž velikost je přímo úměrná okamžité výchylce y oscilátoru a směřuje vždy do rovnovážné polohy. Působením této síly vzniká vlastní kmitání harmonického oscilátoru a je s ní spojena také potenciální energie oscilátoru V. Pro sílu F a potenciální energii V platí vztahy

$$\text{(B12)} \qquad F = -Ky, \; V = \frac{1}{2} Ky^2.$$

Užitím newtonovského formalismu lze snadno dospět k pohybové rovnici harmonického oscilátoru. Pak lze obdržet hledanou pohybovou rovnici vlastních kmitů harmonického oscilátoru ve tvaru

$$\text{(B13)} \qquad -Ky = m\,\ddot{y}\,.$$

Řešením této pohybové rovnice je pohybový zákon (B2), vztah pro rychlost (B3), pro zrychlení (B4) a hodnota konstanty K harmonického oscilátoru, vše ve tvarech

$$\text{(B14)} \qquad y = A \sin(\omega t + \varphi_0), \; v = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0), \; a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y, \quad K = m\omega^2.$$

Úhel $\varphi = \omega t + \varphi_0$ je fáze harmonického pohybu kmitavého, úhel φ_0 je počáteční fáze. Amplitudy rychlosti a zrychlení jsou zřejmé ze vztahů (B14). Ze vztahů (B14) a (B12) je také vidět, že celková energie

$$T + V = \tfrac{1}{2}\, m\omega^2 A^2.$$

Jelikož jde o konstantu, celková energie je pro vlastní harmonické kmitání integrálem pohybových rovnic.

2.4.4. Tlumený a nucený pohyb kmitavý

Vlivem třecích sil a odporu prostředí se amplituda kmitání zmenšuje - pak lze hovořit o tlumeném kmitání. Při pohybu v odporujícím prostředí (opět je uvažováno kmitání v ose y) je odporová síla R často úměrná rychlosti $\dot{y}$, má však opačný směr. Odtud plyne pro odporovou sílu vztah $R = -2bm\dot{y}$, kde $2bm$ je konstanta úměrnosti a b se nazývá konstanta útlumu. S použitím newtonovského formalismu lze zapsat pohybovou rovnici (B5) pro tlumené kmitání ve tvaru

$$\text{(B15)} \qquad -Ky - 2bm\dot{y} = m\,\ddot{y}\,.$$

Rovnice (B15) je diferenciální rovnice, která je lineární, homogenní, 2. řádu a s konstantními koeficienty. Řešení rovnice (B15) vede za podmínky $b < \omega$ (ω je úhlová frekvence vlastního kmitání) k nalezení okamžité výchylky y tlumeného kmitání jako funkce času ve tvaru

$$y = A\, e^{-bt} \sin(\omega_1 t + \varphi_0)\,, \quad \text{kde } \omega_1 = (\omega^2 - b^2)^{1/2}\,.$$

Člen $A e^{-bt}$ představuje stále se s časem zmenšující amplitudu tlumeného kmitání. Kdyby byla konstanta útlumu $b > \omega$, nevznikly by žádné reálné kmity - takovému pohybu se říká pohyb aperiodický.

Jestliže při reálném kmitání nepůsobí na oscilátor vnější síly, kmitání vlivem tlumení časem zanikne. Periodický kmitavý pohyb, který může konat oscilátor vlivem působení vnější periodicky časově proměnné síly libovolně dlouho, je nuceným kmitáním. Vnější periodicky časová síla se nazývá budící silou F_v, vynucuje časově neomezené periodické kmitání (tzv. nucené kmitání) a je dána v nejjednodušším případě vztahem $F_v = F_0 \sin \Omega\, t$ (F_0 je amplituda budící síly, Ω je její úhlová frekvence). S použitím newtonovského formalismu lze zapsat pohybovou rovnici (B5) pro nucené kmitání ve tvaru

$$\text{(B16)} \qquad -Ky - 2bm\,\dot{y} + F_0 \sin \Omega\, t = m\,\ddot{y}\ .$$

Rovnice (B16) je diferenciální rovnice, která je lineární, nehomogenní, 2. řádu a s konstantními koeficienty. Řešení rovnice (B16) vede za podmínky $b < \omega$ (ω je úhlová frekvence vlastního kmitání) k nalezení okamžité výchylky y nuceného kmitání jako funkce času ve tvaru

$$y = A\, e^{-bt} \sin(\omega_1 t + \varphi_0) + A_v \sin(\Omega\, t + \gamma)\ , \quad \text{kde } \omega_1 = (\omega^2 - b^2)^{1/2}.$$

Tvar řešení naznačuje, že první člen $A e^{-bt} \sin(\omega_1 t + \varphi_0)$ popisuje obvyklé tlumené kmitání. Tlumené kmitání časem zanikne a zůstanou jen nucené kmity $y = A_v \sin(\Omega\, t + \gamma)$ s amplitudou A_v, jejichž úhlová frekvence Ω je rovna úhlové frekvenci budící síly F_v. Po dosazení okamžité výchylky y zbylých nucených kmitů do původní pohybové rovnice (B16) je možné vypočítat jak amplitudu A_v nucených kmitů, tak fázový rozdíl $\Delta\varphi = \gamma$ mezi budící silou a nucenými kmity. Např. pro amplitudu A_v lze získat vztah

$$A_v = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + 4b^2\Omega^2}}\ .$$

Získaný vztah ukazuje, že amplituda A_v nucených kmitů je maximální při takové úhlové frekvenci Ω budící síly F_v, při níž má jmenovatel zlomku minimální hodnotu. Stačí tedy položit derivaci výrazu pod odmocninou podle Ω rovnu nule. Řešením takto získané rovnice lze získat hledanou hodnotu úhlové frekvence Ω ve tvaru

$$\Omega = (\omega^2 - 2b^2)^{1/2},$$

který při malé hodnotě konstanty útlumu b vede ke známé podmínce rezonance $\Omega = \omega$ mezi vlastními kmity a budící silou.

2.5. Mechanické vlnění

2.5.1. Druhy vlnění, interference vlnění, vlnová délka

Mechanické vlnění je děj, při němž se kmitání šíří látkovým prostředím složeným z obrovského počtu oscilátorů - hmotných bodů. Mezi oscilátory existuje vazba, která umožňuje přenos nuceného kmitání jednoho oscilátoru postupně na oscilátory další. Oscilátory se nepřemísťují v prostoru, jen kmitají kolem rovnovážných poloh (opět budou uvažovány okamžité výchylky y jednotlivých oscilátorů pouze ve směrech rovnoběžných s osou y). Zdrojem vlnění je oscilátor - hmotný bod, z něhož se vlnění šíří. Druhy vlnění jsou vlny postupné příčné a postupné podélné, vlny stojaté příčné a stojaté podélné.

Jestliže postupují látkovým prostředím dvě nebo více vlnění, pak dochází k jejich skládání neboli interferenci. Např. stojaté vlnění vzniká interferencí vlnění o stejné amplitudě a frekvenci, která postupují proti sobě.

Vlnová délka λ je vzdálenost, do které se rozšíří vlnění v řadě bodové za dobu kmitu T. Bude-li v označovat rychlost šíření vlnění, pak pro vlnovou délku λ lze napsat s použitím (B9) vztahy

$$\text{(B17)} \qquad \lambda = vT = v / \nu .$$

2.5.2. Kinematický a dynamický popis mechanického vlnění

Dále bude zkoumáno vlnění šířící se množinou oscilátorů tvořících řadu bodovou, řada bodová bude ztotožněna se souřadnicovou osou x, zdroj vlnění bude umístěn v počátku souřadnicové soustavy a jednotlivé oscilátory řady bodové budou kmitat harmonicky na základě vztahů (B14). Pohybový zákon (B14) pro okamžitou výchylku jednoho oscilátoru vyjadřoval funkční závislost jen na čase t. Pro případ množiny oscilátorů tvořících osu x bude nutné včlenit do pohybového zákona (do vztahu pro okamžitou výchylku) také závislost na souřadnici x, která bude charakterizovat konkrétní oscilátor z dané množiny oscilátorů. Jelikož se kmitání rozšíří do vzdálenosti x za čas x/v, kde v je rychlost šíření vlnění, bude možné pohybový zákon (okamžitou výchylku) postupného vlnění šířícího se kladnou poloosou osy x napsat s použitím (B10), (B14) a (B17) ve tvarech

$$\text{(B18)} \qquad y = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Při šíření v opačném směru se změní jen znaménko – na znaménko +. Pohybový zákon (B18) se nazývá **vlnová funkce**.

Při přechodu od kinematiky vlnění (viz vlnová funkce (B18)) k dynamice vlnění je nutno přihlížet také k příčinám vlnění, tj. k souvislosti vlnění se silami, jimiž se vlnění řadovou bodovou (osou x) přenáší. S využitím newtonovského formalismu bude sestavena pohybová rovnice zkoumaného vlnění tak, aby byla splněna po dosazení vlnové funkce (B18). Taková pohybová rovnice vlnění se nazývá **vlnovou rovnicí** a má tvar

$$\text{(B19)} \qquad v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} .$$

Po srovnání vlnové rovnice (B19) se zjednodušeným tvarem $F=ma$ zákona síly (B5) lze učinit následující závěry:

- na pravé straně vlnové rovnice je **okamžité zrychlení** jednoho oscilátoru řady bodové (obecněji: **okamžité zrychlení** objemového elementu rozvlněného prostředí)

- levá strana má podle zákona síly **význam podílu síly** působící v jednotlivých místech řady bodové na oscilátor a hmotnosti oscilátoru (obecněji: **význam podílu síly** působící v jednotlivých místech rozvlněného prostředí na objemový prvek a hmotnosti objemového prvku). Levá strana se číselně rovná síle působící na prvek s jednotkovou hmotností

- dosazením vlnové funkce (B18) do vlnové rovnice (B19) lze zjistit, že vlnová funkce splňuje vlnovou rovnici.

Na závěr kinematického a dynamického popisu mechanického vlnění lze učinit zobecnění tvaru vlnové rovnice (B19) na libovolné šíření prostorem (nikoliv pouze řadou bodovou) zavedením obecného označení vlnové funkce písmenem řecké abecedy ψ a Laplaceova operátoru Δ

$$\text{(B20)} \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

Pak lze vlnovou rovnici (B19) přepsat s použitím (B20) ve tvaru

$$\text{(B21)} \qquad \Delta\psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0\,.$$

2.5.3. Zvuk, ultrazvuk

Zvuk je nejen sluchový vjem, ale i vnější příčina sluchového vjemu - uspořádaný pohyb molekul látky (tedy i vzduchu), který se jako postupná podélná i příčná vlna (zvuková vlna) přenáší působením sil, kterými na sebe molekuly působí. Frekvence zvukových vln je v rozmezí 16 Hz až 20 kHz. Zdroje zvukových vln jsou tělesa, ve kterých vzniká chvění jako stojaté příčné nebo stojaté podélné vlnění. Např. tyč délky l upnutá uprostřed a podélně rozechvěná vydává základní zvuk o frekvenci $\nu = v / 2l$. Kmitající konec tyče funguje jako zdroj zvukového vlnění šířícího se do okolního prostředí. Čím kratší je tyč, tím vyšší je frekvence. Při jisté délce tyče dojde k přechodu z oboru slyšitelných zvuků do oboru ultrazvuku (např. při rychlosti šíření zvuku v tyči $v = 5.10^3$ m.s^{-1} bude překročena frekvence 20 kHz při délce tyče 0,125 m).

Ultrazvuk je lidským uchem neslyšitelný zvuk s frekvencí větší než 20 kHz. K buzení ultrazvukových vln se používá místo mechanického podélného rozkmitání tyčí jevu magnetostrikčního nebo piezoelektrického.

Magnetostrikční jev spočívá v tom, že některé feromagnetické látky (např. ve tvaru tyče) se ve střídavém elektromagnetickém poli periodicky zkracují a prodlužují. Nelze sice dosáhnout příliš vysokých frekvencí (asi do 90 kHz, pak je již tyč rezonující se střídavým elektromagnetickým polem příliš krátká), ale lze získat značné intenzity ultrazvuku přesahující 200 W.cm^{-2} (intenzita zvuku od rádia nastaveného na normální poslech je 10^{-9} W.cm^{-2}). Intenzita ultrazvuku je energie ultrazvukového vlnění, která projde za 1 s jednotkovou plochou, jednotková plocha se obvykle volí cm^2.

Přímý piezoelektrický jev vzniká u krystalů, které nejsou středově souměrné (např. u krystalu křemene nebo titaničitu barnatého) Je-li podrobena vhodně vyříznutá destička v jistých směrech tahu nebo tlaku, destička i molekuly krystalu se deformují, změní se poloha nábojů a tak vzniknou podobně jako u polarizace dielektrika opačné povrchové náboje na protilehlých plochách destičky. Mezi protilehlými plochami vzniká piezoelektrické napětí.

Obrácený piezoelektrický jev se objevuje při opačném postupu - je-li vložen na protilehlé plochy destičky potenciálový rozdíl, destička se deformuje. Je-li vloženo na protilehlé plochy destičky střídavé elektrické napětí, destička se rozkmitá a stává se zdrojem ultrazvuku. S využitím vyšších harmonických kmitů základního kmitání destičky lze dosáhnout frekvence až 10^6 kHz a intenzit kolem 50 W.cm^{-2}.

Ultrazvukové vlny jsou příliš krátké, proto se šíří prakticky přímočaře a odrážejí se podle rovnosti úhlu dopadu a úhlu odrazu. Značně se zeslabují ve vzduchu a v plynech, podstatně méně v kapalinách a pevných látkách. S využitím Dopplerova jevu lze z rozdílu frekvence ultrazvukové vlny dopadající na pohybující se rozhraní a odražené od pohybujícího se rozhraní zjistit rychlost pohybu rozhraní.

Kontrolní otázky:

1) Jakými podmínkami lze vymezit klasickou fyziku
2) Jaký je tvar pohybového zákona
3) Jaký je tvar pohybové rovnice
4) Popište Newtonovský formalismus
5) Co jsou to integrály pohybových rovnic
6) Popište 7 integrálů pohybových rovnic jako zákony zachování
7) Popište pohybovou rovnici pro harmonický pohyb kmitavý vlastní, tlumený a nucený
8) Popište pohybový zákon pro harmonický pohyb kmitavý vlastní, tlumený a nucený
9) Popište skládání dvou kolmých harmonických pohybů kmitavých
10) Nalezněte podmínku rezonance pro nucený pohyb kmitavý
11) Popište pohybový zákon pro mechanické vlnění
12) Popište pohybovou rovnici pro mechanické vlnění
13) Co je to Laplaceův operátor
14) Co je to ultrazvuk
15) Co je podstatou piezoelektrického jevu

3. Klasické aplikace elektromagnetického pole

Klíčová slova: Klasicky pojaté elektromagnetické pole, Klasický náboj v elektrickém poli, Klasický náboj v magnetickém poli, Maxwellovy rovnice, Monochromatická elektromagnetická vlna

3.1. Elektromagnetické pole jako klasický a nestatisticky pojatý fyzikální objekt

Východiska klasické nestatistické fyziky spočívají v **nekvantové aproximaci** a v **nerelativistické aproximaci** jevů, které jsou spojeny s nestatisticky pojatým fyzikálním objektem. **Proto je zapotřebí hledat podmínky, za jejichž platnosti lze elektromagnetické pole považovat za klasický a nestatistický fyzikální objekt.** Tyto podmínky by měly vymezit, kdy lze kvantový pohled daný vlnově korpuskulárním dualismem redukovat na klasický pohled daný preferencí pouze jedné stránky dualismu a kdy lze opustit relativistické efekty spojené s jinými objekty, které s elektromagnetickým polem mohou interagovat. Současně je zapotřebí uvést hledané podmínky do souladu s často používaným pojmem „elektromagnetické záření“.

První podmínku lze formulovat jako přítomnost elektromagnetického pole v „rozlehlém“ prostoru bez přítomnosti nábojů. Takové elektromagnetické pole se nazývá **volným elektromagnetickým polem** a při jeho zkoumání se stačí omezit jen na vlnovou stránku vlnově korpuskulárního dualismu - pole se šíří prostorem (např. vakuem nebo dielektrikem) jako **monochromatická elektromagnetická vlna** s jistou úhlovou frekvencí ω a s fázovou rychlostí rovnou rychlosti světla c. Rovněž elektromagnetické záření je za této podmínky elektromagnetickým vlněním.

Druhou podmínku lze tedy formulovat jako případy **obrovských počtů koherentních fotonů** s úhlovou frekvencí ω. Pak lze přejít od reprezentace dílčího fotonu „vlnovým balíkem“ či „Gaussiánem“ s energií $\hbar\omega$ k elektromagnetické vlně v „rozlehlém“ prostoru, v němž nejsou náboje a v němž je energie rozložena spojitě. Tato elektromagnetická vlna již reprezentuje intenzitu $\vec{E}$ makroskopického elektrického pole a magnetickou indukci $\vec{B}$ makroskopického magnetického pole a chová se jako „klasická“ vlna a jako jeden nestatistický fyzikální objekt, byť má tato „klasická“ vlna fázovou rychlost šíření rovnu rychlosti světla.

Elektromagnetické pole a elektromagnetické záření lze považovat za klasický a nestatistický fyzikální objekt za následujících dvou podmínek:

a) obrovské počty fotonů (pak lze přejít k monochromatické elektromagnetické vlně, která reprezentuje intenzitu $\vec{E}$ makroskopického elektrického pole a magnetickou indukci $\vec{B}$ makroskopického magnetického pole)

b) velké vzdálenosti od soustavy nábojů (pak lze elektromagnetické pole považovat za volné a šířící se prostorem opět jako monochromatické elektromagnetické vlnění).

3.2. Pohyb klasického náboje v konstantním elektromagnetickém poli

3.2.1. Pohybová rovnice, elektromagnetická síla

Konstantní elektromagnetické pole je pole, které nezávisí na čase. Klasický náboj je nabitá částice pohybující se nerelativistickými rychlostmi po obvyklých trajektoriích.

Souhrnný tvar pro pohybové rovnice klasického náboje v konstantním elektromagnetickém poli lze získat ve tvaru

$$\text{(B23)} \qquad m\ddot{\vec{r}} = Q.\,\vec{E} + Q\,\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

Po srovnání se zákonem síly (B5) **lze vidět, že zkoumané elektromagnetické pole působí na náboj elektromagnetickou silou** $\overrightarrow{F_{elmg}}$ **(tzv. Lorentzova síla),** která je složena z elektrické síly $\overrightarrow{F_{el}}$ a magnetické síly $\overrightarrow{F_{mg}}$ (viz Dodatek 5, Příklad 1):

$$\text{(B24)} \qquad \overrightarrow{F_{elmg}} = \overrightarrow{F_{el}} + \overrightarrow{F_{mg}} = Q.\,\vec{E} + Q\,\left(\vec{v}\times\vec{B}\right).$$

Konstantní elektromagnetické pole bude dále zkoumáno odděleně jako homogenní elektrické pole a homogenní magnetické pole.

3.2.2. Příčné a podélné homogenní elektrické pole

Rychlost náboje nechť má směr osy x a konstantní velikost při vniknutí do homogenního elektrického pole např. mezi deskami kondenzátoru. Osa x nechť má počátek v místě vniknutí náboje. Magnetické pole je nulové a intenzita elektrického pole s konstantní velikostí má směr osy y. Počáteční podmínky pak budou $\vec{v}$ (v_0, 0,0), $\vec{r}$ (0,0,0), $\vec{E}$ (0,E,0), $\vec{B}$ (0,0,0).

Po dosazení do (B23) budou získány pohybové rovnice ve tvaru

$$m\ddot{x} = 0,\ m\ddot{y} = Q.E,\ m\ddot{z} = 0.$$

Řešením pohybových rovnic bude získán pohybový zákon (B2) ve tvaru

$$x = v_0\,t,\ y = \frac{Q\,E}{2m}t^2,\ z = 0.$$

Náboj se pohybuje po parabole s vrcholem v počátku (podrobné odvození viz uvedená literatura). **Pro podélné homogenní elektrické pole** lze nalézt podrobné odvození v uvedené literatuře.

3.2.3. Homogenní magnetické pole

Homogenní a konstantní magnetické pole bude mít magnetickou indukci $\vec{B}$ (0,0,B), elektrické pole intenzitu $\vec{E}$ (0,0,0). Počáteční podmínky pohybu náboje jsou $\vec{v}$ (0,v_0,0), $\vec{r}$ (0,0,0).

Pak lze obdržet pohybové rovnice, jejichž řešením lze obdržet trajektorii, kterou je kružnice v souřadnicové rovině os x a y o poloměru

$$r = \frac{v_0}{\omega} = \frac{mv_0}{QB} \quad \text{(viz uvedená literatura).}$$

3.3. Maxwellovy rovnice elektromagnetického pole

Na základě zavedení intenzity elektrického pole $\vec{E}$ a indukce magnetického pole $\vec{B}$ lze odvodit čtyři Maxwellovy rovnice elektromagnetického pole pro zřídla a víry elektrického a magnetického pole. Teoretické odvození je matematicky náročné, proto bude při výběru zřídel a vírů elektromagnetického pole použita fenomenologická Maxwellova teorie elektromagnetického pole.

3.3.1. Maxwellova teorie elektromagnetického pole, zřídla a víry pole

Maxwellova teorie elektromagnetického pole (uveřejněná již v r. 1873) **byla teorií makroskopickou,** která popisovala elektromagnetické pole vzbuzené makroskopicky rozloženými náboji a makroskopickými proudy bez přihlédnutí k jejich mikroskopické struktuře. Proto tato teorie mohla náboj i proud považovat za spojitě rozložené a zavést hustotu náboje ρ, hustotu vodivého proudu $\vec{i}$ (vodivý proud je spojen s uspořádaným pohybem volných nábojů) a také hustotu Maxwellova proudu

$$\varepsilon_0\varepsilon_r \, {\partial \vec{E}}/{\partial t}$$ (ε_0 je absolutní permitivita a ε_r relativní permitivita prostředí).

Maxwellův proud je pokračováním vodivého proudu v izolantu, relativní permitivita ε_r vyjadřuje známým způsobem vliv prostředí na elektrické pole. Obdobně je s absolutní permeabilitou μ_0 spojena relativní permeabilita μ_r, která vyjadřuje vliv prostředí namagnetické pole. Propojení vodivého proudu a Maxwellova proudu je potvrzením Maxwellovy hypotézy, že všechny elektrické proudy jsou uzavřené.

Z hlediska mikroskopického pojetí struktury náboje i vodivého a Maxwellova proudu přestávají materiálové konstanty „relativní permitivita“ a „relativní permeabilita“ hrát svou roli. Rovnice elektromagnetického pole vycházející z mikroskopického pojetí se pak nazývají Lorentzovy-Maxwellovy rovnice elektromagnetického pole.

Východiskem pro uvedení Maxwellových rovnic bude výběr zřídel a vírů elektromagnetického pole na základě fenomenologické Maxwellovy teorie elektromagnetického pole a jejich popis prostřednictvím operátorů divergence (div) a rotace (rot). Hledání zřídel a vírů elektromagnetického pole je hledání míst, která jsou zdrojem „změn“ stavu pole.

3.3.2. Matematický popis zřídel a vírů a jejich výběr

Matematický popis zřídel a vírů lze uskutečnit pomocí operátorů div a rot.

Zřídla lze hledat u všech silových polí zjednodušeně řečeno jako místa, z nichž vycházejí nebo do nichž vcházejí otevřené silokřivky příslušného pole. **Víry** si pak lze představit jako místa, která jsou „obkroužena“ uzavřenými silokřivkami.

Při aplikaci představy zřídel a vírů na elektromagnetické pole je zřejmé, že existence elektrického náboje směřuje ke zřídlovosti elektrického pole a neexistence magnetického náboje k nezřídlovosti magnetického pole. Elektrické siločáry mohou být otevřenými křivkami, jestliže vycházejí z náboje nebo do náboje vcházejí. Zřídlo elektrického pole pak bude možné popsat hustotou ρ elektrického náboje. Indukční čáry magnetického pole jsou naopak vždy uzavřenými křivkami - magnetické pole nebude mít zřídla.

Odlišná je situace u vírů elektromagnetického pole. Existuje elektrické pole charakterizované uzavřenými elektrickými siločarami a spojené s jevem elektromagnetické indukce - lze tedy vyvodit, že vírem elektrického pole bude proměnné magnetické pole. Proměnnost magnetického pole lze zachytit nenulovostí parciální derivace magnetické indukce podle času, tj. nenulovostí výrazu $\partial\vec{B}/\partial t$. Magnetické pole se objeví, dá-li se náboj do pohybu. Víry magnetického pole budou proto spojeny s hustotou $\vec{i}$ vodivého proudu a s hustotou $\varepsilon_0\varepsilon_r\,\partial\vec{E}/\partial t$ Maxwellova proudu. Vodivý proud je spojen s pohybem volných nábojů, Maxwellův proud s pohybem vázaných nábojů (s polarizací dielektrika).

3.3.3. Formulace soustavy Maxwellových rovnic

Na základě matematického popisu zřídel a vírů polí pomocí (B25) a (B26) a na základě provedené analýzy zřídlovosti a vírovosti elektrického a magnetického pole lze přistoupit k formulaci Maxwellových rovnic ($\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$, $\mu=\mu_0\mu_r$):

(B27) $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$ (zřídlem elektrického pole je elektrický náboj)

(B28) $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ (magnetické pole je nezřídlové)

(B29) $\operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (vírem elektrického pole je proměnné magnetické pole)

(B30) $\operatorname{rot}\vec{B} = \mu\,\vec{i} + \varepsilon\mu\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (víry magnetického pole jsou vodivý a Maxwellův proud).

Maxwellovy rovnice platí pro popis statických, stacionárních a kvazistacionárních stavů elektromagnetického pole. Při popisu nestacionárních stavů je omezující podmínkou předpoklad platnosti Maxwellových rovnic - rychlosti nábojů jsou malé ve srovnání s rychlostí světla. Následující popis statických, stacionárních, kvazistacionárních a nestacionárních stavů elektromagnetického pole má jen přibližnou platnost.

Statické stavy elektromagnetického pole (elektrostatické pole, magnetické pole neexistuje) jsou spojeny s nepohyblivými náboji, Maxwellovy rovnice mají tvary

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon},\ \operatorname{div}\vec{B} = 0,\ \operatorname{rot}\vec{E} = 0,\ \operatorname{rot}\vec{B} = 0$$ (viz uvedená literatura).

Stacionární stavy elektromagnetického pole jsou spojeny se stacionárním pohybem náboje, tj. s ustáleným pohybem v jednom směru, a tedy se stejnosměrným proudem. Objevuje se magnetické pole a často je lze společně s jen zřídlovým elektrickým polem považovat za konstantní elektromagnetické pole. Maxwellovy rovnice mají tvary

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon},\ \operatorname{div}\vec{B} = 0,\ \operatorname{rot}\vec{E} = 0,\ \operatorname{rot}\vec{B} = \mu\,\vec{i}\,.$$

Kvazistacionární stavy elektromagnetického pole jsou spojeny s pomalými změnami směru pohybu náboje, tj. s nízkofrekvenčním střídavým proudem (změny proudu mají charakter elektromagnetických oscilací např. v rámci *RLC* obvodu). Změny v čase jsou natolik pomalé, že se stačí ustavovat rozložení nábojů odpovídající rovnovážným stavům. Vedle zřídlového elektrického pole se objevuje i jeho vírová varianta a s ní i řada technických aplikací (např. ve spojení se zákonem elektromagnetické indukce generátory elektrického proudu a elektromotory). Maxwellovy rovnice mají tvary

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon},\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0,\ \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},\ \mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu\,\vec{i}\,.$$

Nestacionární stavy elektromagnetického pole jsou spojeny s rychlými změnami směru pohybu náboje, tj. s vysokofrekvenčním střídavým proudem. Vedle zřídlového a vírového elektrického pole se uplatňují oba víry magnetického pole. Maxwellovy rovnice mají tvary dané (B27), (B28) , (B29), (B30).

3.4. Elektromagnetické vlnění

3.4.1. Maxwellovy rovnice pro volné elektromagnetické pole

Podmínky pro pojetí elektromagnetického pole jako klasického a nestatistického fyzikálního objektu byly spojeny s podmínkami volného elektromagnetického pole a obrovského počtu koherentních fotonů. Podmínka volného elektromagnetického pole znamená nepřítomnost volných nábojů a výskyt pole v prostředí, které je buď vakuem nebo neferomagnetickým dielektrikem. Pro volné elektromagnetické pole budou mít v dielektriku Maxwellovy rovnice tvar

$$\text{(B31)}\qquad \mathrm{div}\,\vec{E} = 0,\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0,\ \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},\ \mathrm{rot}\,\vec{B} = \varepsilon\mu\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,.$$

Ve vakuu se tvar (B31) změní na základě odstranění materiálových konstant:

$$\text{(B32)}\qquad \mathrm{div}\,\vec{E} = 0,\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0,\ \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},\ \mathrm{rot}\,\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,.$$

3.4.2. Monochromatická elektromagnetická vlna

Zřejmě nejdůležitějším klasickým rysem elektromagnetického pole je šíření volného elektromagnetického pole prostorem ve formě monochromatického elektromagnetického vlnění. Podmínky vzniku elektromagnetického vlnění jsou dvě: „volné elektromagnetické pole“ a „obrovský počet koherentních fotonů“ - souhrnně „monochromatické volné elektromagnetické pole v rozlehlém prostoru“. Za těchto dvou podmínek lze také elektromagnetické záření spojovat s elektromagnetickým vlněním.

Pohybovou rovnicí vlnění je vlnová rovnice (B21) nebo pro vlnění v řadě bodové vlnová rovnice (B19). Např. vlnové rovnici (B19) pak vyhovuje pohybový zákon vlnění - vlnová funkce (B18). Připomenutý mechanismus pohybových zákonů a pohybových rovnic pro vlnění umožňuje prostřednictvím rovnic (B31) a (B32) dokázat, že monochromatické volné elektromagnetické pole se šíří „rozlehlým“ prostorem formou „klasické“ monochromatické elektromagnetické vlny s fázovou rychlostí rovnou rychlosti světla.

Např. pro vakuum lze získat rovnici

$$\text{(B34)} \qquad \Delta\, \vec{E} \,-\, \varepsilon_0\mu_0\, \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

a pro dielektrikum bez volných nábojů podobnou rovnici

$$\text{(B35)} \qquad \Delta\, \vec{E} \,-\, \varepsilon\mu\, \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Rovnice (B34) a (B35) je možné obdobně odvodit i pro magnetické pole. Po srovnání s obecnou vlnovou rovnicí (B21) je zřejmé, že volné elektromagnetické pole se pro obrovský počet koherentních fotonů šíří prostorem jako monochromatické vlnění, které spočívá v tom, že změny intenzity elektrického pole a indukce magnetického pole postupují prostorem rychlostí vyjádřenou ve vakuu a v dielektriku vzorci

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}\,, \quad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}\,.$$

Elektrické a magnetické vlny nejsou na sobě nezávislé, neboť vektory intenzity elektrického pole a indukce magnetického pole jsou vázány vztahy (B31) a (B32) - elektrické a magnetické vlnění tvoří nedělitelný celek. Proto lze hovořit o monochromatickém elektromagnetickém vlnění, které se ve vakuu šíří rychlostí světla. Vzhledem ke vztahu (B30a) je zřejmé, že Poyntingův vektor má pro monochromatickou elektromagnetickou vlnu směr odpovídající směru jejího šíření a popisuje spojitý transport energie ve volném elektromagnetickém poli. Shoda rychlostí elektromagnetických a optických vln ve vakuu vedla Maxwella k elektromagnetické teorii světla. Experimentálně byla existence elektromagnetických vln potvrzena v r. 1888 Hertzem.

Kontrolní otázky:

1) Za jakých podmínek lze hovořit o klasicky pojatém elektromagnetickém poli

2) Jaká je pohybová rovnice klasického náboje ve volném elektromagnetickém poli

3) Jaký je tvar elektromagnetické síly působící na klasický náboj

4) Jaký je pohybový zákon klasického náboje v příčném homogenním elektrickém poli

5) Jaký je pohybový zákon klasického náboje v podélném homogenním elektrickém poli

6) Jaký je pohybový zákon klasického náboje v homogenním magnetickém poli

7) Jak se popisují zřídla elektromagnetického pole

8) Jak se popisují víry elektromagnetického pole

9) Jaký je tvar Maxwellových rovnic ve statické, stacionární, kvazistacionární a nestacionární teorii elektromagnetického pole

10) Jaká je rychlost šíření elektromagnetické vlny ve vakuu a v prostředí

4. Kvantová mechanika

Klíčová slova: Postulátová výstavba kvantové mechaniky, Hlavní metoda pro stacionární stavy, Atom vodíku, Slupkový model jádra, Molekula vody

4.1. Postulátová výstavba kvantové mechaniky

4.1.1. Diracův princip absolutní malosti

Kvantový objekt (většinou mikroobjekt) nelze zkoumat bez použití přístrojů. To vede k závažným důsledkům - zkoumaný mikroobjekt je operací pozorování uveden do odlišného stavu než tomu bylo před pozorováním (např. elektrony atomového obalu přejdou do excitovaného stavu s vyšší energií). Makroobjektu při přímém pozorování člověkem změna stavu nehrozí - poruchy vyvolané operací pozorování jsou tak malé, že je lze zanedbat. U mikroobjektu tyto poruchy zanedbat nelze - jinak by člověk obdržel prostřednictvím přístroje informace o jiném stavu, než který měl být původně zkoumán.

Diracův princip absolutní malosti říká: V přírodě existuje hranice absolutní malosti pro pozorování fyzikálních objektů - nad touto hranicí lze poruchy vyvolané operací pozorování zanedbat a používat klasickou mechaniku, pod touto hranicí se poruchy vyvolané operací pozorování musí stát součástí nové teorie, kvantové mechaniky.

4.1.2. Princip korespondence

Diracův princip absolutní malosti nastoluje otázku, kdy lze přejít od kvantové mechaniky k mechanice klasické. Kvantová mechanika charakterizuje stavy mikroobjektů soubory kvantových čísel. Např. pro elektron vázaný v obalu atomu jde o čtyři kvantová čísla: Hlavní kvantové číslo n, vedlejší kvantové číslo l, magnetické kvantové číslo m a spinové magnetické kvantové číslo m_s. Hlavní kvantové číslo n má nejnižší hodnotu 1. Kdyby však měla „trajektorie elektronu“ v atomu vodíku (jako soubor míst s největší pravděpodobností výskytu elektronu) přímo pozorovatelný poloměr 1 cm, odpovídala by tomu hodnota kvantového čísla přibližně $n = 10\,000$. V teorii si tak velké vodíkové atomy lze představit.

Princip korespondence (formulovaný Bohrem) **říká:** V limitě velkých kvantových čísel se stírá rozdíl mezi klasickou a kvantovou mechanikou - pro velká kvantová čísla kvantová mechanika dává stejné výsledky jako mechanika klasická.

4.1.3. Princip komplementarity, princip neurčitosti

Princip korespondence vyjasnil základní spojitost klasické a kvantové mechaniky. Objevuje se otázka, jaká je základní odlišnost obou mechanik. Na tuto otázku dá nejdříve dílčí odpověď princip neurčitosti vyjádřený Heisenbergovými relacemi neurčitosti. **Např. Heisenbergova relace neurčitosti** $\Delta x.\ \Delta p_x \sim \hbar$ **vypovídá:** nelze současně měřit souřadnici a hybnost elektronu v ose x, ale každá z těchto veličin by mohla být během libovolně krátkého časového okamžiku změřena samostatně s libovolně velkou přesností. Relace neurčitosti sděluje, že lze přesně pracovat buď se souřadnicí x nebo x-ovou složkou hybnosti. K úplnému poznání stavu elektronu však potřebujeme obě veličiny. Úplné poznání stavu elektronu (z pohledu Heisenbergovy relace neurčitosti $\Delta x.\ \Delta p_x \sim \hbar$) vede k nahrazení klasické trajektorie množinou míst v okolí jádra atomu, v nichž se elektron vyskytuje s různými pravděpodobnostmi. Trajektorie je v kvantové mechanice nahrazena distribucí pravděpodobnosti, které lze populárně říkat „pravděpodobnostní oblak“.

Princip komplementarity říká: Základní odlišnost mezi klasickou a kvantovou mechanikou spočívá v tom, že kvantová mechanika pracuje s dvojicemi veličin nebo pojmů, jejichž hodnoty nebo projevy nemohou být zjištěny současně, k úplnému popisu stavu je však potřebná celá dvojice. Takovým dvojicím náleží název „dvojice komplementárních veličin nebo pojmů“.

Mezi dvojice komplementárních veličin patří vedle dvojice „souřadnice, příslušná složka hybnosti“ také dvojice „kinetická energie T, potenciální energie V“. To znamená, že celkovou energii elektronu vyjádřenou např. hodnotou Hamiltonovy funkce (B6) lze zjistit, ale nelze zjistit, jaká část připadá na kinetickou energii T a jaká část připadá na potenciální energii V. Spolehlivě komplementaritu veličin zjišťují v kvantové mechanice tzv. komutátory operátorů, které zkoumané dvě veličiny reprezentují. Jestliže je komutátor roven nule, obě veličiny lze současně změřit a nevytvářejí tudíž komplementární dvojici veličin. Jestliže je komutátor odlišný od nuly, obě veličiny nelze současně změřit a proto vytvářejí komplementární dvojici veličin.

Nejdůležitější dvojici komplementárních pojmů popisuje vlnově korpuskulární dualismus. Fyzikální objekty mají jak vlnové vlastnosti, tak i vlastnosti korpuskulární. Při jejich zkoumání lze v kvantové mechanice zjišťovat buď vlastnosti vlnové (dané např. vlnovou délkou λ a frekvencí ν), nebo vlastnosti korpuskulární (dané např. hmotností a hybností objektu). Současně nelze oba typy vlastností zkoumat, k úplnému pochopení stavu mikroobjektu a změn tohoto stavu jsou však potřebné oba typy vlastností. Např. elektron v rámci pravděpodobnostního oblaku si při interakcích s jinými částicemi zachovává svou korpuskularitu, avšak v těchto místech se vyskytuje s různými pravděpodobnostmi. „Pravděpodobnostní oblak" je spojen s existencí de Broglieových pravděpodobnostních vln.

Vlnová délka de Broglieových vln látkové částice s velikostí hybnosti $p=mv$ (v je rychlost částice s hmotností m, v je vždy menší než rychlost světla c) je dána známým vztahem

(B35a) $\lambda_{DBV} = h/p$, frekvence $\nu_{DBV} = mc^2/h$.

Jednoduše lze s pomocí (B17) ukázat, že fázová rychlost v_{DBV} de Broglieových vln je větší než rychlost světla:

(B35b) $v_{DBV} = \lambda_{DBV}.\nu_{DBV} = c^2/v > c$.

Odtud pramení opodstatněnost pojmů „pravděpodobnostní vlna", „pravděpodobnostní oblak" a jejich popis komplexními funkcemi a čísly. Součin komplexního čísla s jeho komplexním sdružením již dává číslo reálné, které představuje čtverec amplitudy de Broglieovy pravděpodobnostní vlny - tato amplituda odráží pravděpodobnost, že látková částice bude nalezena v určitém čase na určitém místě. Vlnová délka λ_{DBV} je i pro nejmenší látkové částice nepatrná - např. pro molekulu vodíku (m=3,3.10^{-27} kg, v = 2000 m.s^{-1}, h=6,6.10^{-34} Js) vychází asi λ_{DBV} = 10^{-10} m = 1 Å. Tato vlnová délka má velikost atomu vodíku.

Pro klasické elektrony lze z rovnice ½ m_0 v^2 = eU (m_0 je klidová hmotnost elektronu, U je urychlující napětí) dosadit za rychlost v do (B35a) a získat vztah pro de Broglieovu vlnovou délku elektronu λ_e = 1,23.10^{-9}.$U^{-1/2}$ m. Pro elektrony urychlené napětím 151 V pak vychází vlnová délka λ_e = 1 Å, při urychlujícím napětí 15 100 V je λ_e = 0,1 Å.

Proudu látkových částic v podobě osového svazku lze přisoudit termín **„korpuskulární záření"**. Příkladem je elektronový svazek vytvořený z elektronů vystupujících ze žhavené katody - zdrojem osového svazku elektronů je elektronová tryska. **Vlnové vlastnosti korpuskulárního záření jako např. ohyb a lom** jsou změřitelné a staly se základem elektronové a iontové optiky (např. elektronové a iontové mikroskopy s rozlišovací mezí několik Å nebo hmotnostní spektrografy umožňující zjišťovat přesné hmotnosti iontů).

Důsledkem principu komplementarity je modifikace poznávacího cyklu pro nepřímo pozorovatelné mikroobjekty. Zařazení přístroje pro zjištění informací o mikroobjektu vede k posloupnosti poznávacího cyklu: **jev - experiment - matematický model - pojem - představa - aplikace**. Při možnosti pozorovat **„přímo"** (včetně pozorování dalekohledem nebo mikroskopem) klasická mechanika obvykle absolvuje jinou posloupnost poznávacího cyklu: **jev - představa - pojem - matematický vztah - experiment - aplikace**.

Změnu poznávacího cyklu lze snadno demonstrovat na vyvíjení pojmu „stacionární stav" v klasické a kvantové mechanice. V klasické mechanice automobil jedoucí přímočaře a konstantní rychlostí lze pozorovat přímo, okamžitě si lze učinit představu o stacionárním stavu a vyvodit parametry tohoto stavu - ty jsou dány vztahem pro pohyb rovnoměrný přímočarý s = $v.t$ a 1. Newtonovým pohybovým zákonem, tj. zákonem setrvačnosti. Aby bylo možno popsat stacionární stav vázaného elektronu v kvantové mechanice, je nezbytné nejdříve získat experimentální údaje např. o spektrálních sériích (Lymanově, Balmerově, Paschenově atd.) a vytvořit matematický model. Teprve jeho prostřednictvím bude získán popis pravděpodobnostní vlny (např. použitím stacionární Schrödingerovy rovnice) a odvozena distribuce pravděpodobnosti výskytu elektronu. Distribuce pravděpodobnosti je spojena s tvarem „pravděpodobnostního oblaku", který lze považovat za hledanou představu stacionárního stavu vázaného elektronu.

4.1.4. Interpretační postuláty, princip superpozice

Prostřednictvím Diracova principu absolutní malosti, principu korespondence a principu komplementarity byly identifikovány fyzikální mikroobjekty zkoumané kvantovou mechanikou. Jejich stacionární stavy byly vyjádřeny tvarem „pravděpodobnostního oblaku“ (např. atom ve stacionárním stavu „nezáří a neabsorbuje“). Tato identifikace by nebyla možná bez experimentu, bez provedení operace pozorování pomocí vhodného přístroje. **Na základě výsledků dosažených operací pozorování je zapotřebí popsat proces zpracování získaných výsledků pomocí matematického modelu kvantové mechaniky.**

Matematický model lze popsat srovnáním fyzikálních vlastností operace pozorování a matematických vlastností operátorů. K srovnání těchto dvou typů vlastností přistoupila fyzika v okamžiku, kdy byla experimentálně prokázána fakta o nespojitosti (diskrétnosti) hodnot fyzikálních veličin a tím i o diskrétnosti stavů a jejich změn (Franckův-Hertzův pokus, Sternův-Gerlachův pokus a další). **Výsledky provedeného srovnání jsou vyjádřeny třemi interpretačními postuláty a principem superpozice.**

Interpretační postulát I1 říká: Stavy mikroobjektů budou reprezentovány vlnovými funkcemi ψ, které jsou nositelkou úplné informace o stavu (ať již stacionárním nebo nestacionárním). **Interpretační postulát bude vyjádřen reprezentací ®**

(B36) stav ® vlnovou funkcí ψ (stav reprezentován vlnovou funkcí)

Interpretační postulát I2 říká: Veličiny A jako parametry stavu budou reprezentovány operátory $\widehat{A}$. Operátory musí splňovat jisté podmínky (např. podmínky hermicity a linearity), které zajišťují reálnost parametrů stavu a platnost obecného principu superpozice. Při zkoumání konkrétního mikroobjektu je zapotřebí vymezit tzv. úplný soubor operátorů (operátory z úplného souboru reprezentují jen současně měřitelné veličiny!) - počet operátorů odpovídá počtu stupňů volnosti problému. Po provedení tzv. úplného měření (tj. nalezení vstupních hodnot veličin, které jsou reprezentovány operátory z úplného souboru operátorů) lze také nalézt pro daný vstupní okamžik vlnovou funkci stavu (tj. stav ® ψ) a zkoumat případný časový vývoj stavu. **Interpretační postulát bude vyjádřen reprezentací ®**

(B37) veličina A ® operátorem $\widehat{A}$ (veličina reprezentována operátorem)

Interpretační postulát I3 říká: Hodnoty A_n veličin A jako parametry konkrétních stavů a funkce ψ_n popisující tyto stavy budou získány řešením tzv. vlastní rovnice $\widehat{A}\,\psi_n = A_n\,.\psi_n$ operátoru $\widehat{A}$. Získané hodnoty A_n vytvoří systém vlastních hodnot $\{A_n\}$ operátoru $\widehat{A}$, získané funkce ψ_n systém vlastních funkcí $\{\psi_n\}$ operátoru $\widehat{A}$. Indexy u vlastních hodnot a vlastních funkcí vystihují, že během řešení soustavy vlastních rovnic operátorů z úplného souboru operátorů se budou postupně objevovat jednotlivá kvantová čísla. Množina kvantových čísel odpovídající řešení soustavy vlastních rovnic vytvoří <u>úplný soubor kvantových čísel</u>. **Interpretační postulát bude vyjádřen vlastní rovnicí operátoru $\widehat{A}$ a systémem vlastních hodnot a vlastních funkcí operátoru $\widehat{A}$, tj.**

(B38) $\widehat{A}\,\psi_n = A_n\,.\psi_n\,,\ \{A_n\},\ \{\psi_n\}$

Princip superpozice říká: Systém vlastních funkcí umožňuje vyjádřit vlnovou funkcí ψ reprezentující libovolný stav mikroobjektu lineární kombinací vlastních funkcí ze systému vlastních funkcí $\{\psi_n\}$ operátoru $\widehat{A}$, tj.

(B39) $\psi = \sum\limits_{n} c_n\,\psi_n$ (c_n jsou koeficienty lineární kombinace).

4.1.5. Schrödingerova rovnice a popis matematického modelu kvantové mechaniky

a) Matematický model kvantové mechaniky je v jednoduché podobě tvořen třemi interpretačními postuláty a principem superpozice. Je spojen s existencí hlavního kvantového čísla n, vedlejšího kvantového čísla l, magnetického kvantového čísla m a spinového magnetického kvantového čísla m_s

b) Stacionární Schrödingerova rovnice

Stacionární Schrödingerova rovnice je vlastní rovnice Hamiltonova operátoru $\widehat{H}$ - podle (B38) ji lze napsat ve tvaru $\widehat{H}\,\psi_n = E_n\,\psi_n$. Stacionární Schrödingerova rovnice je přímým důsledkem interpretačního postulátu I3.

Stacionární Schrödingerovu rovnici lze za podmínek vymezujících stacionární stav (Hamiltonův operátor $\widehat{H}$ neobsahuje časovou instrukci) odvodit z nestacionární Schrödingerovy rovnice.

4.1.6. Princip nerozlišitelnosti, Pauliho vylučovací princip

Vymezením matematického modelu kvantové mechaniky jsou vytvořeny předpoklady pro zkoumání stavů a změn stavů mikroobjektu. **Již jeden zkoumaný mikroobjekt má sám o sobě statistický charakter** - v rámci svého „pravděpodobnostního oblaku“ se nachází v různých místech s různou pravděpodobností, má svou distribuci pravděpodobnosti. **Ještě „statističtější“ charakter bude mít makrosystém kvantových mikroobjektů.** Nechť je stav makrosystému reprezentován vlnovou funkcí ψ a nechť označení „q_j“ popisuje j-tý mikroobjekt z N mikroobjektů makrosystému. To znamená, že vlnovou funkci ψ lze vyjádřit funkční závislostí $\psi = \psi\,(q_1, \ldots, q_j, \ldots, q_k, \ldots , q_N)$.

Princip nerozlišitelnosti říká: Kvantové mikroobjekty jednoho druhu jsou nerozlišitelné v tom smyslu, že stav makrosystému se nezmění při záměně libovolného mikroobjektu za jiný mikroobjekt (např. k-tý mikroobjekt může být zaměněn za j-tý mikroobjekt). Princip nerozlišitelnosti je zdůvodněn představou „překrývání pravděpodobnostních oblaků“ jednotlivých mikroobjektů.

Záměnu k-tého a j-tého mikroobjektu popisuje operátor transpozice částic $\widehat{P}_{jk}$. Řešení vlastní rovnice tohoto operátoru

$$\text{(B40)} \qquad \widehat{P}_{jk}\ \psi_{jk} = \lambda.\psi_{jk}$$

poskytuje možnost odvodit existenci dvou typů nerozlišitelných částic - fermionů (splňují Pauliho vylučovací princip, tj. ve stavu vymezeném konkrétními hodnotami kvantových čísel z úplného souboru kvantových čísel se může vyskytovat nejvýše jeden fermion) **a bosonů** (bosony nepodléhají Pauliho vylučovacímu principu).

Při sekundární aplikaci operátoru transpozice $\widehat{P}_{jk}$ na vlastní rovnici (B40) se na levé straně znovu vymění již jednou vyměněné mikroobjekty - primární působení operátoru $\widehat{P}_{jk}$ bude eliminováno. Na pravé straně po záměně pořadí „násobení vlastní hodnotou λ“ a „působení operátoru $\widehat{P}_{jk}$“ bude získán pomocí (B40) výraz $\lambda^2.\psi_{jk}$. **Souhrnně lze tedy zapsat výsledek primárního a sekundárního působení operátoru $\widehat{P}_{jk}$ ve tvaru**

$$\psi_{jk} = \lambda^2.\psi_{jk}.$$

Odtud okamžitě plynou dvě možné vlastní hodnoty operátoru $\widehat{P}_{jk}$: $\lambda=\pm 1$. Hodnota -1 vede k antisymetrickým vlnovým funkcím (transpozicí dvou mikroobjektů se změní znaménko vlnové funkce), které jsou typické právě pro fermiony. Hodnota $+1$ vede k symetrickým vlnovým funkcím, které jsou typické pro bosony.

Důležitým důsledkem principu nerozlišitelnosti je existence fermionů a bosonů. Jelikož fermiony mají „spin“ roven lichému násobku $\hbar/2$ a bosony sudému násobku $\hbar/2$, je zřejmé, že **potřebným důsledkem principu nerozlišitelnosti je vymezení role spinu.**

4.2. Hlavní metoda kvantové mechaniky pro stacionární stavy

Postulátová výstavba kvantové mechaniky daná Diracovým principem absolutní malosti, principem korespondence, principem komplementarity a principem neurčitosti, interpretačními postuláty I1, I2, I3 (včetně stacionární a nestacionární Schrödingerovy rovnice) a principem superpozice, principem nerozlišitelnosti a Pauliho vylučovacím principem **je logicky provázanou soustavou, která umožňuje napsat algoritmus kroků hlavní metody kvantové mechaniky pro zkoumání alespoň stacionárních stavů.**

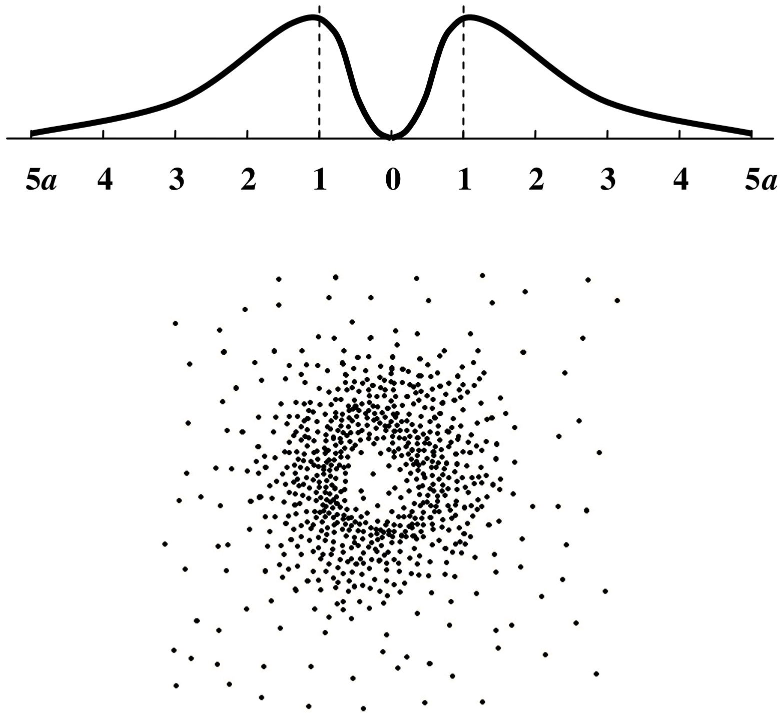
Tento algoritmus obsahuje následující posloupnost kroků:

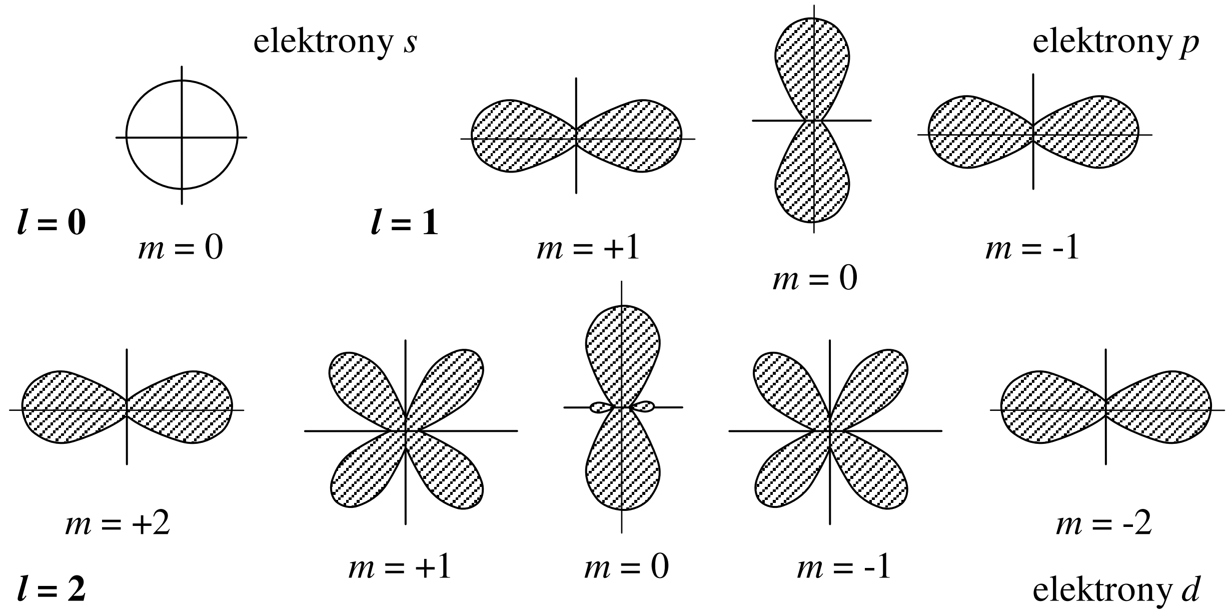
- fyzikální vymezení problému, stanovení počátečních podmínek
- vymezení potřebných operátorů, napsání jejich vlastních rovnic a jejich vyřešení (kvantová čísla)
- nalezení tvarů „pravděpodobnostních oblaků“
- interpretace výsledků popisem stacionárních stavů pomocí přípustných hodnot kvantových čísel a popisem aplikací (např. zdůvodnění struktury Mendělejevovy periodické tabulky).

Tvary „pravděpodobnostních oblaků“ pro atom vodíku

Obr.3

Graf a znázornění radiální hustoty pravděpodobnosti pro n=1, l=0





Obr. 4

Grafy směrových hustot pravděpodobnosti pro elektrony *s* (l = 0), elektrony *p* (l = 1) a elektrony *d* (l = 2)

4.3. Aplikace hlavní metody – atom vodíku, slupkový model atomového jádra, prostorová struktura molekuly vody (viz uvedená literatura)

Kontrolní otázky:
1) Jaká je postulátová výstavba kvantové mechaniky
2) Co jeto vlnově korpuskulární dualismus elektronu
3) Co je to operátor
4) Co je to vlastní rovnice operátoru
5) Co je to stacionární Schrödingerova rovnice
6) Co popisuje nestacionární Schrödingerova rovnice
7) Jaké jsou kroky hlavní metody kvantové mechaniky
8) Jaká je interpretace kvantových číse
9) Aplikujte hlavní metodu na atom vodíku
10) Aplikujte hlavní metodu na jádro atomu (popište slupkový model)
11) Jaká je prostorová struktura molekuly vody

5. Relativistická mechanika

Klíčová slova: Struktura relativistické mechaniky, Speciální teorie relativity, Pohybová Rovnice relativistické dynamiky, Pohybová hmotnost, Einsteinův vztah Pro energii

5.1. Popis struktury relativistické mechaniky

a) Pozorovatelnost relativistických objektů

Rychle se pohybující relativistické objekty nebo relativistické objekty s extrémními hustotami hmotnosti nejsou přímo pozorovatelné - o jejich existenci informují přístroje. Zatímco přímo pozorovatelné objekty makrosvěta (včetně jejich pozorování dalekohledem nebo mikroskopem) lze zkoumat klasickou cestou (**jev-představa-pojem-matematický vztah-experiment-aplikace**), relativistická cesta se podobá cestě kvantové:

- **jev**
- **experiment** (nutnost zapojení přístroje pro získání informací o relativistickém objektu)
- **matematický model** (zpracované číselné výsledky experimentu ve formě matematických souvislostí)
- **pojem** (pojem vytvořený bez přímého kontaktu se zkoumaným jevem)
- **představa** (představa využívající klasických zkušeností získaných přímým kontaktem s objekty makrosvěta)
- **aplikace.**

b) Podmínky relativističnosti jevů

Relativističnost jevů spojená s extrémními hustotami může být doložena např. pomocí podmínky degenerace Fermiho plynu.

Relativističnost jevů spojená s vysokými rychlostmi může být doložena např. Michelsonovým a Morleyovým pokusem již z r. 1887. Michelsonův pokus byl opakován a vždy vedl ke stejnému závěru - vedle kontrakce délek vedl společně s dalšími pokusy k zformulování principu konstantní rychlosti světla c. Pro vakuum tento princip postuloval, že vzájemné působení (interakce) mezi fyzikálními objekty může probíhat pouze rychlostí $v \leq c$. Odtud okamžitě vyplynula nemožnost sil působících přímo „do dálky“ (tj. okamžitě) a jen přibližná platnost Newtonova gravitačního zákona a dalších podobných zákonů sil používaných v Newtonově mechanice. Dále odtud vyplynulo, že nemohou existovat objekty látkové nebo polní formy hmoty, které by se pohybovaly nebo šířily rychlostí vyšší než rychlost světla ve vakuu.

c) Východiska klasické mechaniky

Klasická mechanika vychází z absolutního prostoru (Euklidovský prostor s obvyklou kartézskou souřadnicovou soustavou os $x=x_1$, $y=x_2$, $z=x_3$) a absolutního času, které jsou nezávislé na rozložení a pohybu fyzikálních objektů. Galileiho princip relativity pak konstatuje, že všechny inerciální vztažné soustavy jsou plně rovnoprávné z hlediska všech zákonů Newtonovy mechaniky.

d) Speciální teorie relativity

Speciální teorie relativity formuluje již Einsteinův speciální princip relativity - všechny inerciální vztažné soustavy jsou rovnoprávné a pro formulaci všech fyzikálních zákonů rovnocenné (nejen zákonů Newtonovy mechaniky, ale i např. všech elektromagnetických zákonů). Odtud ovšem vyšel požadavek opustit nejen představu absolutního prostoru (tj. představu „světelného éteru“ tento prostor vyplňující), ale také představu absolutního času a tím i absolutního pohybu. Galileiho transformace byla nahrazena transformací Lorentzovou ve známém tvaru

$$\text{(B45)} \qquad x_1' = a\,(x_1 - ut),\ x_2' = x_2,\ x_3' = x_3,\ t' = a\,(t - uc^{-2}x_1).$$

Tvar (B45) platí pro případ splývání os x_1' a x_1, rovnoběžnost os x_2' a x_2, rovnoběžnost os x_3' a x_3 a v okamžiku setkání počátků obou inerciálních soustav (pohybujících se vůči sobě rychlostí u) ukazují hodiny v obou soustavách na nulu. Koeficient a je dán výrazem

$$\text{(B46)} \qquad a = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}\,.$$

Mezi jednoduché aplikace speciální teorie relativity patří především důsledky Lorentzovy transformace z oblasti relativistické kinematiky (kontrakce délek, dilatace času, skládání rychlostí) a důsledky z oblasti relativistické dynamiky (závislost hmotnosti za pohybu na rychlosti mikroobjektu, Einsteinův vztah pro energii $E = mc^2$).

Euklidův prostor byl ve speciální teorii relativity nahrazen čtyřrozměrným Minkowského prostoročasem tvořeným množinou světobodů o souřadnicích x_1, x_2, x_3 a $x_4 = ict$, kde i je komplexní (imaginární) jednotka. Světočárou se stala libovolná jednorozměrná (jednoparametrová) množina světobodů (např. osy Minkowského prostoročasu). Nejdůležitějšími světočárami se staly světočáry hmotných bodů (podle Minkowského jsou „obrazem věčného životního běhu materiální částice“). Parametrem, na kterém závisejí všechny čtyři souřadnice, se stal vlastní čas hmotného bodu.

Lorentzova transformace také znamenala přechod od obyčejných (prostorových) vektorů se 3-mi složkami k čtyřvektorům, tj. k tenzorům 1. řádu se 4-mi složkami (tenzor n-tého řádu má v Minkowského prostoročase obecně 4^n složek). Příkladem čtyřvektorů jsou např. čtyřrychlost, čtyřzrychlení nebo Minkowského elektromagnetická čtyřsíla, v níž přešla Lorentzova síla $\vec{F} = Q\vec{E} + Q(\vec{v} \times \vec{B})$.

Na závěr je dobré připomenout orientační dělení částic na klasické (hmotnost za pohybu je srovnatelná s klidovou hmotností), relativistické (hmotnost za pohybu převyšuje klidovou hmotnost) a ultrarelativistické (rychlost se rovná rychlosti světla).

e) Obecná teorie relativity

Metrika Minkowského prostoročasu (čtverec intervalu dvou světobodů, tj. $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$) obsahuje před jednotlivými sčítanci konstantní čísla rovná 1, její tzv. metrický tenzor je konstantní. Ukázalo se však, že gravitační pole určuje samo metriku prostoročasu prostřednictvím Einsteinova gravitačního zákona - prostoročas se stává křivým Riemannovým prostorem s nekonstantním metrickým tenzorem 2. řádu g_{ij}. Speciální teorie relativity se přetransformovala v obecnou teorii relativity, neboť speciálně relativistická teorie gravitace se ukázala být limitním případem obecně relativistické teorie gravitace.

Obecná teorie gravitace vyložila neinerciální vztažné soustavy jako systémy křivočarých souřadnic v Riemannově prostoru a vyšla z obecného principu relativity - inerciální i neinerciální vztažné soustavy jsou pro formulaci obecných fyzikálních zákonů zcela rovnocenné. Současně prokázala rovnost setrvačné a tíhové hmotnosti a na tomto základě zformulovala princip ekvivalence - gravitační síla není lokálně rozeznatelná od setrvačné síly.

5.2. Relativistická dynamika speciální teorie relativity

5.2.1. Pohybová rovnice relativistické mechaniky

Pohybová rovnice klasické mechaniky má v rámci newtonovského formalismu tvar (B5). Nechť platí Lorentzova transformace souřadnic ve tvaru (B45). Pak musí být vzaty v úvahu podmínky platnosti tvaru (B45): splývání os x_1' a x_1, rovnoběžnost os x_2' a x_2, rovnoběžnost os x_3' a x_3, v okamžiku setkání počátků obou inerciálních soustav ukazují hodiny v obou soustavách na nulu, „čárkovaná“ soustava souřadnic se pohybuje vůči „nečárkované“ pohybem rovnoměrně přímočarým rychlostí u mající směr kladné poloosy os x_1' a x_1.

Nechť síla má rovněž stálý směr os x_1' a x_1 a nechť hmotný bod (částice) s hmotností m se pohybuje rychlostí v mající opět směr os x_1' a x_1 Za těchto podmínek a za podmínek platnosti Lorentzovy transformace (B45) lze pohybovou rovnici (B5) **nerelativistické mechaniky** napsat v jednorozměrném tvaru

$$F = m \, {}^{\mathrm{d}v}\!/_{\mathrm{d}t} \, .$$

Tento tvar platí ve všech inerciálních soustavách a nemění se Galileiho transformací

$$x_1 = x_1' + ut, \; x_2 = x_2', x_3 = x_3'.$$

Pohybová rovnice **relativistické mechaniky** nemůže upravený jednorozměrný tvar (B5) přijmout - tento tvar se s Lorentzovou transformací (B45) mění. Neměnnost vůči Lorentzově transformaci (B45) zajišťuje užití vektorů ve čtyřrozměrném Minkowského prostoročase. Formálně lze použít následující tvar jednorozměrné pohybové rovnice:

$$\text{(B47)} \qquad F = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}, \text{ kde}$$

$$\text{(B48)} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad v < c,$$ m_0 je klidová hmotnost částice, m je hmotnost za pohybu.

Pohybová rovnice relativistické mechaniky (B47) a rovnice (B48) tvoří základ relativistické dynamiky.

Relativistický přírůstek hmotnosti $m - m_0$ je patrný jen při rychlostech blízkých rychlosti světla. Při rychlosti 0,1 c se hmotnost zvětší jen o 0,5 %, při rychlosti 0,9 c přírůstek hmotnosti již přesahuje 100 %. Dostatečně velké rychlosti pro měřitelnost relativistických přírůstku hmotnosti mají především elementární částice - při popisu jejich stavů a změn jejich stavů nelze používat klasické fyzikální zákony.

5.2.2. Einsteinův vztah pro energii

Rovnice (B47) a (B48) umožňují snadné odvození Einsteinova vztahu pro energii

$$\text{(B49)} \qquad E = mc^2.$$

Po zavedení relativistické hybnosti $p = mv$ pro zkoumaný jednorozměrný případ, kde hmotnost za pohybu m je dána vztahem (B48), je možné vztah (B49) pro celkovou energii přepsat ve tvaru (viz uvedená literatura)

$$\text{(B50)} \qquad E = \sqrt{m_0^{\,2}\, c^4 + p^2\, c^2}\ .$$

Tvar (B50) představuje vhodnou možnost, jak rozlišit nerelativistickou, relativistickou a ultrarelativistickou energii zkoumané volné částice (u volných částic jsou zanedbány vzájemné klasické nebo výměnné kvantové interakce s jinými volnými částicemi téhož druhu) **– viz uvedená literatura.**

Kontrolní otázky:

1) Jaké jsou podmínky platnosti klasické fyziky

2) Jaké jsou podmínky platnosti speciální teorie relativity

3) Jaké jsou podmínky platnosti obecné teorie relativity

4) Co je to kontrakce délek a dilatace času

5) Jaká je pohybová rovnice relativistické dynamiky

6) Jaký je vztah pro hmotnost za pohybu

7) Odvoďte Einsteinův vztah pro energii

6. Kvantové a relativistické aplikace elektromagnetického pole

Klíčová slova: Klasická a kvantová teorie elmg.pole, Vlnově korpuskulární dualismus fotonu, Elektromagnetické záření, Fotoelektrický jev, Comptonův jev, Anihilační jev

6.1. Srovnání klasické a kvantové teorie monochromatického elektromagnetického pole

Klasicky pojaté elektromagnetické pole je volným a monochromatickým elektromagnetickým polem spojeným s obrovským počtem „koherentních“ fotonů. Pak lze soubor „koherentních“ fotonů nahradit elektromagnetickým polem, které se šíří prostorem jako klasická monochromatická a makroskopická elektromagnetická vlna popsaná pohybovými rovnicemi (B34) a (B35).

Typickým rysem klasicky pojatého elektromagnetického pole je **spojitý** přenos energie. Klasickou teorií elektromagnetického pole je fenomenologická Maxwellova teorie uveřejněná již v r. 1873.

Klasická teorie monochromatického volného elektromagnetické pole představuje oddělenou vlnovou stránku vlnově korpuskulárního dualismu obecného elektromagnetického pole. Elektromagnetickou vlnu lze zkoumat klasickým nestatistickým přístupem.

Kvantová teorie monochromatického volného elektromagnetického pole vychází z **diskrétního** charakteru přenosu energie prostřednictvím menšího počtu **stejně velkých energetických kvant s vyššími frekvencemi**, jejichž nositeli jsou „koherentní“ fotony.

Např. v oblasti rádiových vln se vzhledem k nepatrné energii fotonů korpuskulární vlastnosti volného elektromagnetického pole prakticky neprojevují, ale počínaje např. viditelným světlem je nutné tyto vlastnosti brát v úvahu (foton rádiových vln má energii řádově 10^{-9} eV, foton viditelného světla již 1,6 eV až 3 eV).

Kvantová teorie monochromatického volného elektromagnetické pole představuje oddělenou korpuskulární stránku vlnově korpuskulárního dualismu obecného elektromagnetického pole.

V rámci kvantových aplikací elektromagnetického pole lze monochromatické volné elektromagnetické pole zkoumat v řadě případů klasickým nestatistickým přístupem jako uspořádaný tok částic pohybujících se rychlostí světla.

6.2. Vlnově korpuskulární dualismus fotonu

Jeden foton lze reprezentovat „vlnovým balíkem“ či „Gaussiánem“. V rámci vlnového balíku je např. intenzita elektrického pole soustředěna jen v určitých „malých“ oblastech prostoru, které se šíří rychlostí rovnou rychlosti světla *c*.

Jeden foton nebo malý počet fotonů nelze zkoumat bez důsledné aplikace vlnově korpuskulárního dualismu - nejdříve bude předložen vhodný model fotonu (vlnový balík viz Obr.5, „Gaussián“ viz Obr.6), pak bude odděleně popsána vlnová a korpuskulární stránka fotonu.

Podrobněji – viz uvedená literatura.

6.2.1. Vlnová stránka fotonu

Nositelem kvanta elektromagnetické energie $\hbar\omega_0$ ($\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$) je vlnový balík se střední úhlovou frekvencí ω_0 a celkovou energií $\hbar\omega_0$. Vlnový balík je modelem fotonu. Podle pravděpodobnostní interpretace kvantové mechaniky je vzhledem k (B36) stav látkové částice reprezentován vlnovou funkcí ψ - násobení ψ komplexním sdružením ψ^* (tj.$\psi\psi^*$) má význam hustoty pravděpodobnosti výskytu látkové částice. S použitím analogie je možné součin spektrální funkce $f(\lambda)$ s jejím komplexním sdružením $f(\lambda)^*$, tj.

$$f(\lambda)\, f(\lambda)^*,$$

interpretovat jako hustotu pravděpodobnosti vlnové délky λ fotonu. Vlnový balík se spektrální funkcí $f(\lambda)$ jako „Gaussiánem" a celkovou energií $\hbar\omega_0$ ($\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$) popisuje vlnovou stránku fotonu. **Pravděpodobnostní interpretace vlnové stránky fotonu jako polní částice je odlišná od pravděpodobnostní interpretace vlnové stránky látkových částic - na rozdíl od látkových částic nejde o pravděpodobnost výskytu, ale o pravděpodobnost vlnového čísla.**

6.2.2. Korpuskulární stránka fotonu

Korpuskulární stránka fotonu spočívá v interpretaci fotonu jako částice. Významnými charakteristikami každé částice (korpuskule) jsou hmotnost a hybnost. S využitím vztahů (B49), (B50), (B51) a (B51a) lze pro hmotnost a velikost hybnosti fotonu nalézt po dosazení nulové klidové hmotnosti fotonu vztahy

$$\text{(B52)} \qquad m = \frac{\hbar\omega}{c^2}\,,\; p = \frac{\hbar\omega}{c}\,.$$

Vztahy (B52) určují mimo jiné setrvačnost fotonu - tím jsou fotony charakterizovány jako částice, které mají také svou váhu. Odtud již vyplývá např. zakřivení světelných paprsků v gravitačním poli, které bylo předpovězeno obecnou teorií relativity. Hmotnost viditelného fotonu je rovna pěti miliontinám hmotnosti elektronu, foton tvrdého zánikového záření je však již stejně hmotný jako elektron, jsou však již známy fotony těžší než vodíkový atom.

6.3. Elektromagnetické záření

6.3.1. Elektromagnetické spektrum

Obecně pojatá optika je naukou především o elektromagnetickém záření, zúženě pojatá optika pojednává jen o jednom druhu elektromagnetického záření - o světle, které vnímá člověk očima a prostřednictvím kterého získává poznatky o vnějším světě.

Elektromagnetickým spektrem je nazýván přehled druhů elektromagnetického záření uspořádaný od největších vlnových délek až k vlnovým délkám nejkratším. Přehled druhů elektromagnetického záření je popsán v uvedené literatuře.

6.3.2. Kvantová optika

a) <u>Fotoelektrický jev</u>

Jednoduchý teoretický výklad fotoelektrického jevu podal v r. 1905 Einstein. Vyšel z představy, že jde o přímé působení fotonů na elektrony v kovu. Každý budoucí fotoelektron (elektron, který vystoupí z kovu) obdrží celou energii fotonu $\hbar\omega$, část této energie (výstupní práce A) je spotřebována na překonání potenciálu na povrchu kovu, zbytek energie bude odpovídat kinetické energii elektronu T po vystoupení z kovu. Minimální energie potřebná k vytržení elektronu z kovu je pak dána vztahem $A = \hbar\omega_0$, kde frekvence $\nu_0 = \omega_0 / 2\pi$ se nazývá charakteristickou frekvencí kovu. Einsteinova fotoelektrická rovnice bude mít tedy tvar

(B53) $$\hbar\omega = T + \hbar\omega_0$$ (T je maximální možná energie fotoelektronu).

Např. pro sodík je $\nu_0 = 5{,}15.10^{14}$ Hz, fotoelektrický jev nastává již při dopadu viditelného světla s vlnovou délkou kratší než 5821 Å. Výstupní práce $A = \hbar\omega_0$ pro sodík je pak asi 2,1 eV - tomu odpovídá představa potenciálové hráze na povrchu sodíku výšky 2,1 V.

b) Obrácený fotoelektrický jev

Při obráceném fotoelektrickém jevu naopak na kovy dopadají elektrony a kov vysílá fotony rentgenového záření (vlnovou povahu rentgenového záření poprvé demonstroval v r. 1906 Barkla, objevitelem rentgenového záření se stal v r. 1895 Roentgen). Je-li elektron před dopadem urychlen napětím U mezi katodou a anodou, získá energii eU a pro maximální možnou frekvenci $\nu_{max} = \omega_{max} / 2\pi$ (nejkratší vlnovou délku λ_{min}) lze napsat Duanův-Huntův zákon ve tvaru

(B54) $$\hbar\omega_{max} = eU, \quad U\lambda_{min} = \frac{2\pi\hbar c}{e} = 1{,}24.10^{-6}\ \mathrm{Vm}.$$

V tomto tvaru není zachycena energie, kterou získá elektron při průchodu potenciálovou hrází při vniknutí do kovu (viz vztah (B53)) - důvodem je zanedbatelnost příslušné vstupní práce (řádově několik eV) vůči celkové energii elektronu (např. 10^5 eV).

Rentgenové spektrum obsahuje dva druhy záření - brzdné rentgenové záření a charakteristické rentgenové záření. **Brzdné rentgenové záření** má spojité spektrum složené z velkého množství slabých čar všech frekvencí až do jisté nejvyšší frekvence ν_{max} (minimální vlnové délky λ_{min}). Tuto minimální vlnovou délku lze snadno vypočítat pomocí vztahu (B54) v závislosti na napětí mezi katodou, která emituje elektrony, a anodou, na kterou urychlené elektrony dopadají. **Charakteristické rentgenové záření** má nespojité čárové spektrum, složené z jednotlivých čar. Vlnové délky těchto čar odpovídají materiálu anody, tj. struktuře elektronového obalu atomů (např. wolframu), které tvoří anodu. Se strukturou obalu jsou pak spojeny dovolené přechody mezi excitovanými vyššími energetickými stavy elektronu a stavy nižšími v souladu s výběrovými pravidly pro možné změny kvantových čísel - tomu pak odpovídá vzhled čárového spektra.

c) Comptonův jev

Jednoduchý teoretický výklad jevu podal v r. 1923 Compton. Studoval rozptyl rentgenových paprsků z molybdenové antikatody v tuhové desce - v rozptýleném záření byly nalezeny spektrální čáry odpovídající původní vlnové délce λ a také nové vlnové délce $\lambda' > \lambda$. Rozdíl obou délek $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ byl nazván Comptonovým posunem.

Výklad Comptonova jevu je založen na představě srážky fotonu s elektronem, který je jen slabě poután k atomu (je v podstatě volný). Pro tuto srážku platí zákon zachování energie ve tvaru

$$\hbar\omega + m_0c^2 = \hbar\omega' + mc^2$$

(ω je frekvence původního fotonu, ω' frekvence rozptýleného fotonu, m_0 klidová hmotnost elektronu - před srážkou lze vzhledem k nízkým tepelným rychlostem uvažovat klidovou hmotnost m_0, m je hmotnost elektronu po srážce). Zákon zachování hybnosti lze napsat na základě použití kosinové věty ve tvaru

$$(mv)^2 = p_\nu^2 + p_\nu'^2 - 2\, p_\nu p_\nu' \cos\vartheta$$

($p_\nu = \hbar\omega/c$ je podle vztahu (B52) hybnost fotonu před srážkou, $p_\nu' = \hbar\omega'/c$ je podle vztahu (B52) hybnost fotonu po srážce, v je rychlost elektronu po srážce, ϑ je úhel, který svírá směr původní hybnosti p_ν a směr hybnosti p_ν').

Po úpravách spojených s vyloučením neznámé rychlosti v elektronu lze získat vztah pro Comptonův posun

$$\text{(B55)} \qquad \Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\vartheta).$$

Graficky lze vztah (B55) znázornit např. v polárních souřadnicích kardioidou (srdcovkou), je-li zvolen směr dopadajících fotonů za polární osu. Comptonův posun $\Delta\lambda$ je pak pro daný úhel ϑ roven vzdálenosti počátku souřadnicové soustavy od kardioidy.

Vztah (B55) platí teoreticky pro foton libovolné hmotnosti (B52). Je-li však hmotnost fotonu (B52) o hodně menší než klidová hmotnost elektronu m_0 (tj. $\hbar\omega << m_0 c^2$) neplatí zákon zachování energie, ani vztah (B55) dosti přesně. Ztráta hybnosti fotonu je příliš nepatrná, Comptonův posun je neměřitelně malý. Comptonův jev lze tedy pozorovat jen pro fotony s velkou hmotností (tj. pro fotony rentgenového záření nebo gama záření), nikoliv pro fotony viditelného světla.

Comptonův posun je rovněž neměřitelný při srážce fotonu s elektronem pevně vázaným k jádru - pro takovou srážku by bylo nezbytné nahradit ve vztahu (B55) klidovou hmotnost elektronu klidovou hmotností jádra. Právě proto, že i atomy látek s velkým počtem slabě poutaných elektronů (např. tuha) obsahují i vnitřní elektrony pevně vázané k jádru, lze v rozptýleném záření pozorovat původní i rozptýlenou vlnovou délku.

d) Anihilační a obrácený anihilační jev

Při anihilačním jevu vznikají při setkání např. elektronu a pozitronu (tj. elektronu a jeho antičástice) fotony zánikového záření. Částice a antičástice anihilují, tj. „vyzáří se“ proměnou např. ve dva fotony velmi tvrdého záření. Jelikož klidová energie elektronu m_0c^2 je 0,511 MeV, vzniklý foton má frekvenci odpovídající rovnosti $\hbar\omega = m_0c^2$, tj. $\nu = 1{,}24.10^{20}$ Hz. Takové frekvence leží v oboru gama záření.

Při obráceném anihilačním jevu obvykle proniká foton do velké blízkosti jádra, kterému odevzdá jen malou část své hybnosti. Je-li potom energie fotonu větší než energie odpovídající hmotnosti dvou elektronů, může vzniknout dvojice elektron-pozitron s výslednou kinetickou energií T danou vztahem

$$\text{(B56)} \qquad T = \hbar\omega - 2\, m_0c^2.$$

Vznik dvojice elektron-pozitron lze pozorovat. u gama záření vydávaného např. radioaktivním beryliem Be ($\hbar\omega$ =5 MeV) nebo také u fotonů velmi pronikavého rentgenového záření vytvořeného např. synchrotronem.

Kontrolní otázky:

1) Popište vlnově korpuskulární dualismus volného monochromatického elmg. pole
2) Popište Gaussián jako model fotonu
3) Popište vlnovou stránku fotonu
4) Popište korpuskulární stránku fotonu
5) Vymezte podmínky kvantové optiky
6) Popište Einsteinovu fotoelektrickou rovnici
7) Vysvětlete vznik brzdného rtg. záření
8) Vysvětlete vznik charakteristického rtg. záření
9) Popište Comptonův posun
10) Popište anihilační a obrácený anihilační jev

Literatura:

Záškodný,P.: Přehled základů teoretické fyziky (s aplikací na radiologii). Didaktis, Bratislava, 2005

Záškodný,P.: Survey of Principles of Theoretical Physics (with application to radiology). Algoritmus, Avenira Foundation, 2006

Kozlovská,D., Skalická,Z., Záškodný,P.: Úvod do praktika z radiologické fyziky. JU, České Budějovice, 2005

Záškodný,P., Tarábek,P.: Didaktická komunikace a její aplikace. MFI, ročník 16, ISSN 1210-1761